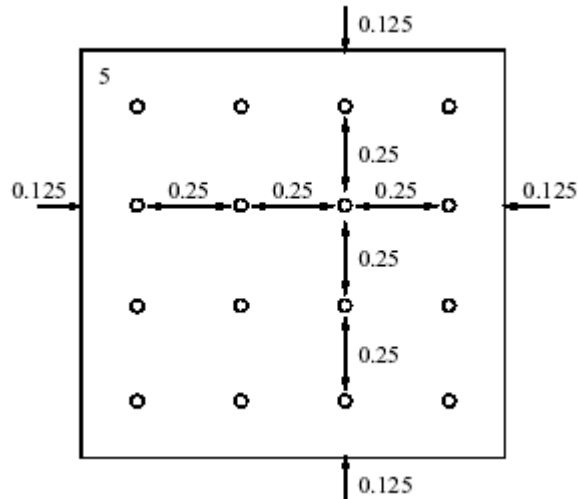


1. (Kang, 2001)

Las distancias entre átomos, por ejemplo dentro del sector 5, son las siguientes:



(a) SCM: Centro de masa estricto

$$|\bar{X}_i - \bar{U}_5| + |\bar{Y}_i - \bar{V}_5| = \begin{cases} 0, & i = 5 \\ 1, & i = 2, 4, 6, 8 \\ 2, & i = 1, 3, 7, 9 \end{cases}$$

Si se deshacen las situaciones de empate arbitrariamente, tendremos un vector de preferencia de envío (5,2,4,6,8,1,3,7,9)

(b) ESCM: Centro de masa estricto previsto

En primer lugar, calculamos

$$E[|X_1 - U_5|] + E[|Y_1 - V_5|].$$

$$\begin{aligned} E[|X_1 - U_5|] + E[|Y_1 - V_5|] &= E[U_5 - X_1] + E[Y_1 - V_5] \\ &= E[U_5] - E[X_1] + E[Y_1] - E[V_5] = 1.5 - 0.5 + 2.5 - 1.5 = 2 \end{aligned}$$

Por simetría,

$$\begin{aligned} E[|X_1 - U_5|] + E[|Y_1 - V_5|] &= E[|X_3 - U_5|] + E[|Y_3 - V_5|] \\ &= E[|X_7 - U_5|] + E[|Y_7 - V_5|] \\ &= E[|X_9 - U_5|] + E[|Y_9 - V_5|] \end{aligned}$$

Consideremos  $E[|X_2 - U_5|] + E[|Y_2 - V_5|]$

$$E[|X_2 - U_5|] = 0 \times \frac{4}{16} + 0.25 \times \frac{6}{16} + 0.5 \times \frac{4}{16} + 0.75 \times \frac{2}{16} = \frac{5}{16}$$

$$E[|Y_2 - V_5|] = E[Y_2 - V_5] = E[Y_2] - E[V_5] = 2.5 - 1.5 = 1$$

$$\Rightarrow E[|X_2 - U_5|] + E[|Y_2 - V_5|] = \frac{21}{16}.$$

Por simetría,

$$E[|X_2 - U_5|] + E[|Y_2 - V_5|] = E[|X_4 - U_5|] + E[|Y_4 - V_5|]$$

$$= E[|X_6 - U_5|] + E[|Y_6 - V_5|]$$

$$= E[|X_8 - U_5|] + E[|Y_8 - V_5|].$$

Por último, calculemos  $E[|X_5 - U_5|] + E[|Y_5 - V_5|]$  (Si lo único que nos interesa es un vector de preferencia de envío, no necesitamos hacer este cálculo, ya que obviamente nos dará el valor más bajo).

$$E[|X_5 - U_5|] = 0 \times \frac{4}{16} + 0.25 \times \frac{6}{16} + 0.5 \times \frac{4}{16} + 0.75 \times \frac{2}{16} = \frac{5}{16}$$

$$E[|Y_5 - V_5|] = 0 \times \frac{4}{16} + 0.25 \times \frac{6}{16} + 0.5 \times \frac{4}{16} + 0.75 \times \frac{2}{16} = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow E[|X_5 - U_5|] + E[|Y_5 - V_5|] = \frac{5}{8}.$$

Si se deshacen las situaciones de empate arbitrariamente, tendremos un vector de preferencia de envío (5,2,4,6,8,1,3,7,9).

(c) Centro de masa modificado

$$|\bar{X}_i - 1.875| + |\bar{Y}_i - 1.625| = \begin{cases} 2.25, & i = 1 \\ 1.25, & i = 2 \\ 1.5, & i = 3 \\ 1.5, & i = 4 \\ 0.5, & i = 5 \\ 0.75, & i = 6 \\ 2.5, & i = 7 \\ 1.5, & i = 8 \\ 1.75, & i = 9 \end{cases}$$

Si se deshacen las situaciones de empate arbitrariamente, tendremos un vector de preferencia de envío (5,6,2,3,4,8,9,1,7).

(d) Centro de masa modificado previsto

$$\begin{aligned}
E[|X_1 - 1.875|] + E[|Y_1 - 1.625|] &= 1.875 - E[X_1] + E[Y_1] - 1.625 \\
&= 1.875 - 0.5 + 2.5 - 1.625 = 2.25 \\
E[|X_2 - 1.875|] + E[|Y_2 - 1.625|] &= 1.875 - E[X_2] + E[Y_2] - 1.625 \\
&= 1.875 - 1.5 + 2.5 - 1.625 = 1.25 \\
E[|X_3 - 1.875|] + E[|Y_3 - 1.625|] &= E[X_3] - 1.875 + E[Y_3] - 1.625 \\
&= 2.5 - 1.875 + 2.5 - 1.625 = 1.5 \\
E[|X_4 - 1.875|] + E[|Y_4 - 1.625|] &= 1.875 - E[X_4] + \\
&\quad E[Y_4 - 1.625 | Y_4 > 1.625]P(Y_4 > 1.625) + \\
&\quad E[1.625 - Y_4 | Y_4 \leq 1.625]P(Y_4 \leq 1.625) \\
&= 1.875 - 0.5 + (1.875 - 1.625)\frac{1}{4} + (1.625 - 1.375)\frac{3}{4} = 1.625 \\
E[|X_5 - 1.875|] + E[|Y_5 - 1.625|] &= 1.875 - E[X_5] + \\
&\quad E[Y_5 - 1.625 | Y_5 > 1.625]P(Y_5 > 1.625) + \\
&\quad E[1.625 - Y_5 | Y_5 \leq 1.625]P(Y_5 \leq 1.625) \\
&= 1.875 - 1.5 + (1.875 - 1.625)\frac{1}{4} + (1.625 - 1.375)\frac{3}{4} = 0.625 \\
E[|X_6 - 1.875|] + E[|Y_6 - 1.625|] &= E[X_6] - 1.875 + \\
&\quad E[Y_6 - 1.625 | Y_6 > 1.625]P(Y_6 > 1.625) + \\
&\quad E[1.625 - Y_6 | Y_6 \leq 1.625]P(Y_6 \leq 1.625) \\
&= 2.5 - 1.875 + (1.875 - 1.625)\frac{1}{4} + (1.625 - 1.375)\frac{3}{4} = 0.875 \\
E[|X_7 - 1.875|] + E[|Y_7 - 1.625|] &= 1.875 - E[X_7] + 1.625 - E[Y_7] \\
&= 1.875 - 0.5 + 1.625 - 0.5 = 2.5 \\
E[|X_8 - 1.875|] + E[|Y_8 - 1.625|] &= 1.875 - E[X_8] + 1.625 - E[Y_8] \\
&= 1.875 - 1.5 + 1.625 - 0.5 = 1.5 \\
E[|X_9 - 1.875|] + E[|Y_9 - 1.625|] &= E[X_9] - 1.875 + 1.625 - E[Y_9] \\
&= 2.5 - 1.875 + 1.625 - 0.5 = 1.75
\end{aligned}$$

Si se deshacen las situaciones de empate arbitrariamente, tendremos un vector de preferencia de envío (5,6,2,3,8,4,9,1,7).

(e) (i) No. El vehículo policial más próximo variará dependiendo de la localización del cliente, así como de las localizaciones de los vehículos en cada momento. Por tanto, no podemos determinar a priori un vector de preferencia de envío fijo.

(ii) Tomemos, por ejemplo, la transición del estado  $(b_9, b_8, b_7, b_6, \mathbf{0}, b_4, b_3, b_2, b_1)$  al estado  $(b_9, b_8, b_7, b_6, \mathbf{1}, b_4, b_3, b_2, b_1)$ , donde  $b_1 \in \{0,1\}$ ; es decir, la transición desde el estado en el que el vehículo policial 5 no está prestando servicio al estado en el que está ocupado. Conceptualmente, la tasa de esta transición se puede definir como:

$\lambda P$  (de entre todos los vehículos que no están prestando servicio, el número 5 es el más próximo al nuevo cliente); donde  $\lambda$  es la tasa de llegada de clientes en toda la región.

**2. Problema 5.1 LO (Toktay, 1996; Chew, 1997)**

(a) Tenemos una variable aleatoria  $S$  que indica el tiempo de servicio en la localización del cliente; y se nos dan también los siguientes datos:  $\lambda = 1$  llamada/hora;  $v_x = v_y = 10$  millas/hr;  $A = 4$  millas<sup>2</sup>;  $E[S] = 45$  min = 0,75 hr; y  $\sigma_s^2 = 45$  min<sup>2</sup> = 0,75 hr<sup>2</sup>. Calcularemos en primer lugar la media y la varianza de  $S_1$ , el primer tiempo de servicio en un periodo de ocupación, y a continuación la media y la varianza de  $S_2$ , el segundo tiempo de servicio (y todos los tiempos sucesivos) en un periodo de ocupación.

$$E[S_1] = \frac{X_0 + Y_0}{40} + 0.75, \quad \sigma_{S_1}^2 = \frac{X_0^2 + Y_0^2}{4800} + 0.75^2 .$$

$$E[S_2] = \frac{X_0 + Y_0}{30} + 0.75, \quad \sigma_{S_2}^2 = \frac{X_0^2 + Y_0^2}{1800} + 0.75^2 .$$

Se nos pide hallar el tiempo previsto desde el momento en el que un cliente realiza una llamada hasta que la unidad de servicio llega al evento. Llamaremos  $V$  a esta cantidad de tiempo, que será  $V = W - 0,75$ .

Téngase también en cuenta que, al ser  $\lambda = 1$ ;  $W = L$ .

Conviene no olvidar que tenemos tres supuestos distintos:  $X_0 = Y_0$ ;  $X_0 = 2Y_0$ ; y  $X_0 = 20Y_0$ , además de la restricción  $X_0Y_0 = 4$ .

	Caso1	Caso2	Caso3
$(X_0, Y_0)$	(2, 2)	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\frac{20}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$
$\rho$	0.8792	0.8874	1.0684
$W$	6.62	7.13	$\infty$
$V$	5.87	6.38	$\infty$

Los valores de  $\rho$  y  $W$  se hallan mediante las ecuaciones (5.1) y (5.2) del libro de texto.

(b) El tiempo medio de respuesta se minimiza cuando  $X + Y$  está minimizado, lo que depende de que  $XY = A$ . Sustituyendo  $Y = A/X$  por  $X + Y$  y diferenciando la expresión con respecto a  $X$ , tendremos:

$$X = Y = \sqrt{A}.$$

**3. Problema 5.4 LO (Ingolfsson, 1993; Kang, 2001)**

(a) Para hallar las cargas de trabajo  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , necesitamos obtener las probabilidades de estado estacionario. Por tanto, debemos en primer lugar calcular las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \text{tasa total de llegadas en la región 1 } (x \geq 0) \\ &= 2\lambda_0 \times \text{área de la región 1} = 8\lambda_0 = 0.00016 \\ \lambda_2 &= \text{tasa total de llegadas en la región 2 } (x < 0) \\ &= \lambda_0 \times \text{área de la región 2} = 3\lambda_0 = 0.00006 \\ \lambda &= \lambda_1 + \lambda_2 = 11\lambda_0 = 0.00022 \\ \eta &= \lambda/2\mu = 0.0011 \\ \eta_1 &= \lambda_1/\mu = 0.0016 \end{aligned}$$

$$\eta_2 = \lambda_2/\mu = 0.0006$$

Luego las probabilidades de estado estacionario nos vienen dadas por:

$$P_{00} = \frac{1}{1 + 2\eta + 2\eta^2} \approx 0.9978, \quad P_{01} = \frac{\eta_1 + 2\eta^2}{1 + 2\eta} P_{00} \approx 0.0016,$$

$$P_{10} = \frac{\eta_2 + 2\eta^2}{1 + 2\eta} P_{00} \approx 0.0006, \quad P_{11} = 2\eta^2 P_{00} \approx 0.0000.$$

Aplicando a continuación las ecuaciones (5.12a) y (5.12b), las cargas de trabajo para las dos unidades resultan del siguiente modo:

$$\rho_1 = P_{01} + P_{11} \approx 0.0016, \quad \rho_2 = P_{10} + P_{11} \approx 0.0006.$$

(b) Calcularemos en primer lugar  $f_{nj}$ , las fracción de peticiones de servicio respondidas que lleva la unidad  $n$  al área de respuesta  $j$ . Aplicando las ecuaciones (5.15) y (5.16),

$$f_{11} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{11})\lambda} (P_{00} + P_{10}) \approx 0.7261, \quad f_{22} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{11})\lambda} (P_{00} + P_{01}) \approx 0.2726,$$

$$f_{12} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{11})\lambda} P_{10} \approx 0.0002, \quad f_{21} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{11})\lambda} P_{01} \approx 0.0012.$$

Al ser los valores de  $f_{12}$  y  $f_{21}$  demasiado pequeños, podemos pasar por alto los envíos entre distritos a la hora de calcular  $f_{D_x}(x)$ . Aplicando el teorema de la probabilidad total,  $f_{D_x}(x)$  se calcula mediante

$$f_{11} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{11})\lambda} (P_{00} + P_{10}) \approx 0.7261, \quad f_{22} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{11})\lambda} (P_{00} + P_{01}) \approx 0.2726,$$

$$f_{12} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{11})\lambda} P_{10} \approx 0.0002, \quad f_{21} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{11})\lambda} P_{01} \approx 0.0012.$$

donde

$$P(1 \rightarrow 1) = \frac{f_{11}}{f_{11} + f_{22}} \quad \text{y} \quad P(2 \rightarrow 2) = \frac{f_{22}}{f_{11} + f_{22}}$$

(Obsérvese que estamos normalizando  $f_{11}$  y  $f_{22}$ , ya que hemos dejado de lado los envíos entre distritos).

Dado un evento de  $1 \rightarrow 1$  (se informa de una reparación de emergencia desde la región 1 y se asigna a ella la unidad 1), la distancia- $x$  recorrida es, por inspección, uniforme entre 0 y 1. Por consiguiente,

$$f_{D_x}(x | 1 \rightarrow 1) = 1, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Consideremos ahora  $f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2)$ . Llamaremos  $E$  al evento en el cual las reparaciones de emergencia provienen del este del garaje de la unidad 2 y  $W$  al evento en el que provienen del oeste de dicho garaje.

Podemos entonces volver a formular  $f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2)$  como

$$f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2) = f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2, E)P(2 \rightarrow 2, E) + f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2, W)P(2 \rightarrow 2, W).$$

Observamos que

$$f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2, E) = 1, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$

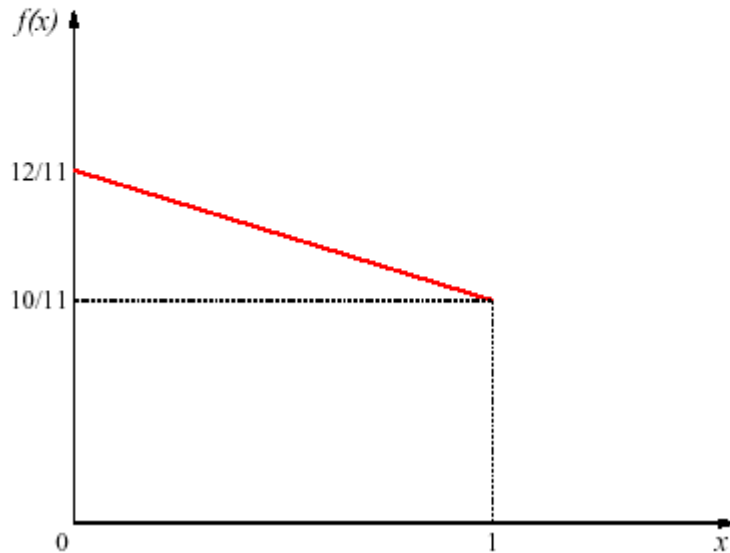
$$f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2, W) = 2 - 2x, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Dado que  $P(2 \rightarrow 2, E) = 2/3$  y  $P(2 \rightarrow 2, W) = 1/3$ ,  $f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2)$  viene dado por

$$f_{D_x}(x | 2 \rightarrow 2) = (1)\frac{2}{3} + (2 - 2x)\frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

Combinando todos los componentes, obtenemos

$$\begin{aligned} f_{D_x}(x) &= (1)P(1 \rightarrow 1) + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right)P(2 \rightarrow 2) \\ &= 1.091 - 0.182x \approx \frac{12}{11} - \frac{1}{11}x, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$



(c) En el apartado (b) hemos calculado los valores de  $f_{12}$  y  $f_{21}$ . Indicaremos mediante  $f_I$  la fracción de envíos correspondiente a envíos en el área entre respuestas.

$$f_I = f_{12} + f_{21} \approx 0.0014$$

(d) (iii)  $T'$  disminuirá, al igual que  $|\rho_1 - \rho_2|$ . Antes de esta variación,  $\rho_1 - \rho_2$ . La variación hace que  $\rho_1$  disminuya ligeramente y que  $\rho_2$  aumente también ligeramente; a consecuencia de lo cual  $|\rho_1 - \rho_2|$  disminuye. Asimismo, antes de la variación, la distancia media de desplazamiento de la unidad 1 es

mayor y también es mayor su grado de ocupación, por lo que una pequeña variación hacia la unidad 1 hace disminuir la distancia global de desplazamiento.

(e) (i)  $E[D_y]$  permanece igual. Las unidades 1 y 2 se encuentran en la misma localización-y, por lo que  $E[D_y | \text{la unidad 1 responde a una llamada}] = E[D_y | \text{la unidad 2 responde a una llamada}] = E[D_y]$

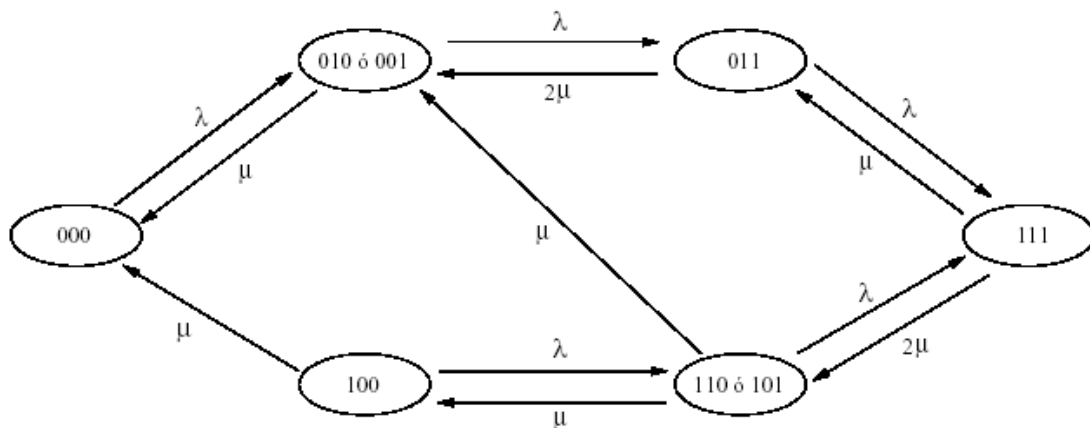
Por tanto, el valor de  $E[D_y]$  no cambia al variar la unidad que responde a una llamada.

(f) (i)  $(\rho_1 + \rho_2)$  permanece invariable.

$$\rho_1 + \rho_2 = P_{01} + P_{11} + P_{10} + P_{11} = 1 - P_{00} + P_{11} = 1 - P_{00}(1 - 2\eta^2) = \frac{2\eta + 4\eta^2}{1 + 2\eta + 2\eta^2}$$

Esto indica que  $\rho_1 + \rho_2$  es solamente una función de  $\eta = \lambda/2\mu$ , que es un parámetro global del sistema y no varía al moverse la línea que funciona como límite. Más concretamente, si esta línea se modifica a una distancia  $\epsilon$  en dirección a la unidad 2,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  cambian a  $8\lambda_0 + 2\epsilon\lambda_0$  y  $3\lambda_0 - 2\epsilon\lambda_0$ , respectivamente. No obstante, su suma permanece invariable:  $11\lambda_0$ .

(g) Deseamos calcular  $\rho_3 = P_{100} + P_{101} + P_{110} + P_{111}$ , para lo cual diseñamos el siguiente diagrama de transición entre estados:



En este caso hemos fusionado los estados 101 y 110 en un estado único (al que llamaremos  $A$ ), ya que no necesitamos hallar esas probabilidades de estado por separado. (Del mismo modo, se fusionan los estados 010 y 001). En primer lugar hallamos  $P_{111}$  aplicando la ecuación (4.57) para el sistema de colas M/M/3 sin espacio de espera. Dado que  $\lambda = 0,11$  y  $\mu = 0,1$ ,

$$P_{111} = P_3 = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^3}{6}}{1 + \lambda/\mu + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2} + \frac{(\lambda/\mu)^3}{6}} = 0,07579.$$

podemos formular las ecuaciones de equilibrio para los estados 100 y  $A$ .

$$(\lambda + \mu)P_{100} = \mu P_A \Rightarrow 0,21 \times P_{100} = 0,1 \times P_A$$

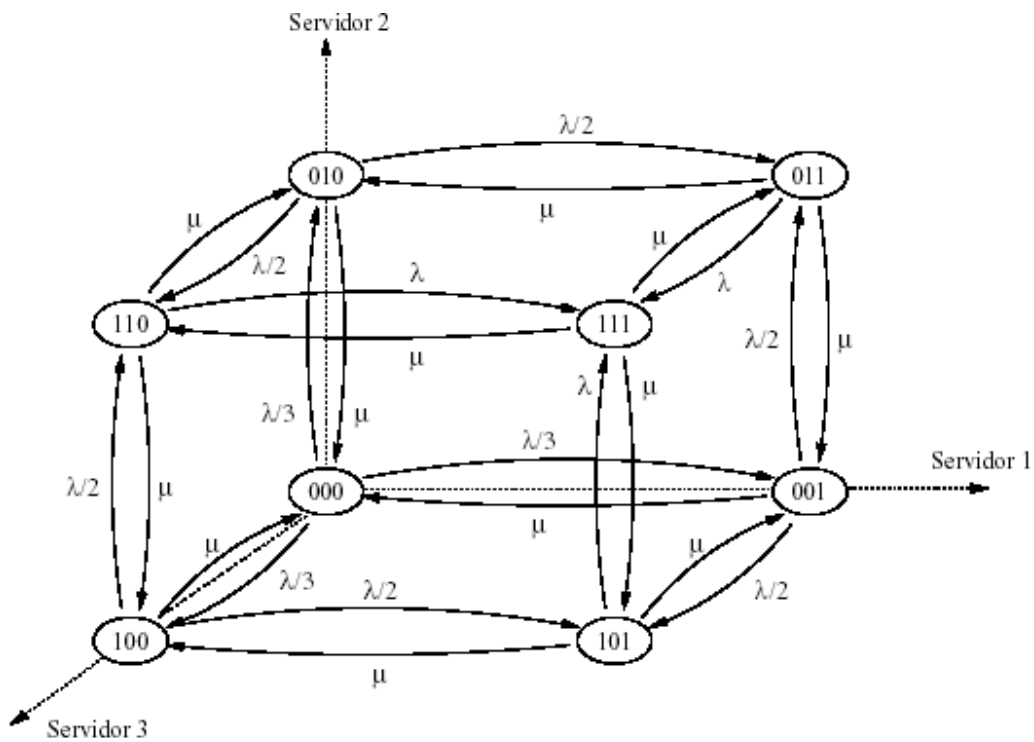
$$(\lambda + 2\mu)P_A = \lambda P_{100} + 2\mu P_{111} \Rightarrow 0,31 \times P_A = 0,1 \times P_{100} + 0,2 \times 0,07579$$

Al resolver estas dos ecuaciones obtenemos  $P_A = 0,05777$  y  $P_{100} = 0,02751$ . Por lo tanto,

$$\rho_3 = P_{100} + P_A + P_{111} = 0.16107$$

**4. Problema 5.8 LO (Bratu, 1999; Kang, 2001)**

El diagrama de transición entre estados para este modelo de colas hipercubo con tres servidores es el siguiente:



(a) Todos los servidores tienen el mismo tiempo de servicio. Además, los procesos de llegada y de servicio son según Poisson. Por consiguiente, podemos relacionar el modelo hipercubo con un sistema de colas M/M/3 con capacidad de sistema 3 (no permite colas). Aplicando la ecuación (4.57) del libro de texto, obtenemos la probabilidad de estado estacionario ( $P_n$ ) de que haya  $n$  vehículos ocupados.

$$P_0 = \frac{1}{1 + \lambda/\mu + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2} + \frac{(\lambda/\mu)^3}{6}} = \frac{48}{48 + 24\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3}$$

$$P_1 = \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2} + \frac{(\lambda/\mu)^3}{6}} = \frac{24\lambda}{48 + 24\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3}$$

$$P_2 = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^2}{2}}{1 + \lambda/\mu + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2} + \frac{(\lambda/\mu)^3}{6}} = \frac{6\lambda^2}{48 + 24\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3}$$

$$P_3 = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^3}{6}}{1 + \lambda/\mu + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2} + \frac{(\lambda/\mu)^3}{6}} = \frac{\lambda^3}{48 + 24\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3}$$

(b) Llamemos  $P(A)$  a la probabilidad de estado estacionario de que el vehículo 1 se halle ocupado y el vehículo 2 libre. Por tanto,  $P(A) = P_{001} + P_{101}$ . Sabemos que

$$P_0 = P_{000}$$

$$P_1 = P_{001} + P_{010} + P_{100}$$

$$P_2 = P_{011} + P_{101} + P_{110}$$

$$P_3 = P_{111}$$

En vez de definir las ecuaciones de equilibrio del modelo de colas hipercubo y de resolverlas, podemos deducir de la simetría del modelo de colas que

$$P_{001} = P_{010} = P_{100} = \frac{P_1}{3}$$

$$P_{011} = P_{101} = P_{110} = \frac{P_2}{3}$$

Por lo tanto,

$$P(A) = P_{001} + P_{101} = \frac{P_1 + P_2}{3} = \frac{8\lambda + 2\lambda^2}{48 + 24\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3}$$

(c) El tiempo promedio de desplazamiento por todo el sistema,  $T$ , se calcula mediante la fórmula

$$\bar{T} = \sum_n \sum_j f_{nj} T_{nj}$$

en la que  $f_{nj}$  es la fracción de llamadas atendidas que llevan el vehículo  $n$  al sector  $j$ , y  $T_{nj}$  es el tiempo medio que emplea dicho vehículo en desplazarse al sector  $j$ . Como puede observarse,

$$T_{11} = \frac{1}{90}, \quad T_{12} = \frac{1}{30}, \quad T_{13} = \frac{1}{30}$$

$$T_{21} = \frac{1}{30}, \quad T_{22} = \frac{1}{90}, \quad T_{23} = \frac{1}{30}$$

$$T_{31} = \frac{1}{30}, \quad T_{32} = \frac{1}{30}, \quad T_{33} = \frac{1}{90}$$

$f_{ij}$  se calcula del siguiente modo (véanse las ecuaciones (5.15) y (5.16)):

$$f_{11} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{111})\lambda} (P_{000} + P_{010} + P_{100} + P_{110})$$

$$f_{22} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{111})\lambda} (P_{000} + P_{001} + P_{100} + P_{101})$$

$$f_{33} = \frac{\lambda_3}{(1 - P_{111})\lambda} (P_{000} + P_{001} + P_{010} + P_{011})$$

$$f_{12} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{111})\lambda} \left( \frac{1}{2} P_{010} + P_{110} \right)$$

$$f_{13} = \frac{\lambda_3}{(1 - P_{111})\lambda} \left( \frac{1}{2} P_{100} + P_{110} \right)$$

$$f_{21} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{111})\lambda} \left( \frac{1}{2} P_{001} + P_{101} \right)$$

$$f_{23} = \frac{\lambda_3}{(1 - P_{111})\lambda} \left( \frac{1}{2} P_{100} + P_{101} \right)$$

$$f_{31} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{111})\lambda} \left( \frac{1}{2} P_{001} + P_{011} \right)$$

$$f_{32} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{111})\lambda} \left( \frac{1}{2} P_{010} + P_{011} \right)$$

Obsérvese que, al ser

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\lambda}{3}, P_{001} = P_{010} = P_{100}, \text{ y } P_{011} = P_{101} = P_{110}, \text{ tenemos}$$

$$f_{11} = f_{22} = f_{33},$$

$$f_{12} = f_{13} = f_{21} = f_{23} = f_{31} = f_{32}.$$

Por lo que el valor de  $T$  nos viene dado por

$$\bar{T} = 3 \times f_{11} \left( \frac{1}{90} \right) + 6 \times f_{12} \left( \frac{1}{30} \right) = \frac{f_{11}}{30} + \frac{f_{12}}{5}$$

Dado que

$$f_{11} = \frac{1}{3(1-P_3)} \left( P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 \right) = \frac{1}{1-P_3} \left( \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{9}P_1 + \frac{1}{9}P_2 \right),$$

$$f_{12} = \frac{1}{3(1-P_3)} \left( \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{3}P_2 \right) = \frac{1}{1-P_3} \left( \frac{1}{18}P_1 + \frac{1}{9}P_2 \right),$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{1-P_3} \left( \frac{1}{90}P_0 + \frac{2}{270}P_1 + \frac{1}{270}P_2 \right) + \frac{1}{1-P_3} \left( \frac{1}{90}P_1 + \frac{1}{45}P_2 \right) \\ &= \frac{1}{1-P_3} \left( \frac{1}{90}P_0 + \frac{1}{54}P_1 + \frac{7}{270}P_2 \right) \\ &= \frac{1}{48 + 24\lambda + 6\lambda^2} \left( \frac{48}{90} + \frac{24\lambda}{54} + \frac{42\lambda^2}{270} \right). \end{aligned}$$

- Si  $\lambda \approx 0$ ,  $T \approx 1/90$  hr. Esto supone que cuando la tasa de llegada de llamadas es muy pequeña, la mayor parte de las llamadas en cada sector son atendidas por el vehículo de ese sector.
- Si  $\lambda = 3$ ,  $T = 0,0188$  hr.
- Si  $\lambda = 1.000$ ,  $T = 0,0259$  hr.

(d) Si se sigue esta estrategia de envíos, los sectores no importan. Supongamos, por ejemplo, que llega una llamada al sector 1. Si el vehículo 2 se halla más próximo al lugar de la llamada que el vehículo 1, se enviará al vehículo 2 aunque el vehículo 1 esté libre. El número de vehículos disponibles cuando se recibe una llamada viene indicado por  $K$ .  $D$  y  $T$  son, respectivamente, la distancia y el tiempo de desplazamiento desde el vehículo disponible más próximo hasta el lugar de la llamada. Si  $K = 1$ , el vehículo, que es el único disponible, deberá atender la llamada. Obsérvese que la distancia de desplazamiento desde el vehículo hasta el lugar de la llamada está distribuido uniformemente sobre  $[0,1.5]$ , ya que el sistema permite realizar cambios de sentido. Por lo tanto

$$E[D | K = 1] = 0.75 \Rightarrow E[T | K = 1] = \frac{0.75}{30} = \frac{1}{40}$$

Si  $K = 2$ , a la hora de elegir entre los dos vehículos disponibles se enviará el vehículo que se halle más próximo al lugar de la llamada. Si indicamos las distancias desde los dos vehículos al lugar de la llamada, respectivamente, mediante  $D_1$  y  $D_2$ , tendremos

$$E[D | K = 2] = E[\min(D_1, D_2)].$$

Como  $D_1$  y  $D_2$  se hallan uniformemente distribuidas a lo largo de  $[0, 1.5]$ , podemos calcular  $E[\min(D_1, D_2)]$  mediante el método de Crofton. (Utilizaremos  $G(a)$  en lugar de  $\mu$  en la ecuación (3.64), ya que en este problema  $\mu$  indica la tasa de servicio).

$$\frac{dG(a)}{da} + \frac{2G(a)}{a} = \frac{2G_1(a)}{a}.$$

Como

$$\begin{aligned} G_1(a) &= E[\min(D_1, D_2) \mid 0 \leq D_1 \leq a, a < D_2 \leq a + \varepsilon] \\ &= E[D_1 \mid 0 \leq D_1 \leq a] = \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

tenemos

$$\frac{dG(a)}{da} + \frac{2G(a)}{a} = 1.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, obtenemos un resultado de  $G(a) = a/3$ . De donde se deduce

$$E[D \mid K = 2] = \frac{1.5}{3} \Rightarrow E[T \mid K = 2] = \frac{1.5}{90} = \frac{1}{60}.$$

Si  $K = 3$ , deseamos calcular

$$E[D \mid K = 3] = E[\min(D_1, D_2, D_3)].$$

Para ello podemos utilizar el método de Crofton aplicado a 3 variables aleatorias e independientes distribuidas de modo uniforme. Partiendo de la ecuación (3.69),

$$\frac{dG(a)}{da} + \frac{3G(a)}{a} = \frac{3G_1(a)}{a}.$$

Dado que

$$\begin{aligned} G_1(a) &= E[\min(D_1, D_2, D_3) \mid 0 \leq D_1 \leq a, 0 \leq D_2 \leq a, a < D_3 \leq a + \varepsilon] \\ &= E[\min(D_1, D_2) \mid 0 \leq D_1 \leq a, 0 \leq D_2 \leq a] = \frac{a}{3}, \end{aligned}$$

tenemos

$$\frac{dG(a)}{da} + \frac{3G(a)}{a} = 1.$$

Resolviendo la ecuación diferencial, obtenemos  $G(a) = a/4$ . De donde resulta

$$E[D \mid K = 3] = \frac{1.5}{4} \Rightarrow E[T \mid K = 3] = \frac{1.5}{120} = \frac{1}{80}.$$

El tiempo medio de desplazamiento se obtiene entonces mediante

$$\begin{aligned}\bar{T} &= E[T] = E[T | K = 1]P(K = 1) + E[T | K = 2]P(K = 2) + E[T | K = 3]P(K = 3) \\ &= \left(\frac{1}{40}\right) \frac{P_{011} + P_{101} + P_{110}}{1 - P_{111}} + \left(\frac{1}{60}\right) \frac{P_{001} + P_{010} + P_{100}}{1 - P_{111}} + \left(\frac{1}{80}\right) \frac{P_{000}}{1 - P_{111}} \\ &= \frac{1}{1 - P_3} \left( \frac{1}{40}P_2 + \frac{1}{60}P_1 + \frac{1}{80}P_0 \right) \\ &= \frac{1}{48 + 24\lambda + 6\lambda^2} \left( \frac{6\lambda^2}{40} + \frac{24\lambda}{60} + \frac{48}{80} \right).\end{aligned}$$

- Si  $\lambda \approx 0$ ,  $\bar{T} \approx \frac{1}{80}$  hr.
- Si  $\lambda = 3$ ,  $\bar{T} = 0.0181$  hr.
- Si  $\lambda = 1,000$ ,  $\bar{T} = 0.0250$  hr.

### 5. Problema 5.14 LO (Kang, 2001)

(a) Si  $\rho_n = \rho$ ,

$$f = \frac{\rho}{\lambda} \sum_{n=1}^N \lambda_n = \rho.$$

Lo que quiere decir que cuando todos los vehículos tienen la misma carga de trabajo  $\rho$ , la probabilidad de que una llamada sea atendida por un envío entre distritos es igual a  $\rho$ .

(b) Si  $\lambda_n = \text{constante}$ , tenemos que  $\lambda_n = \lambda/N$ . Por lo que

$$f = \sum_{n=1}^N \rho_n \frac{\lambda/N}{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \rho_n.$$

Si todas las áreas de respuesta tienen la misma tasa de llegadas, la probabilidad de que una llamada sea atendida por un envío entre distritos será igual a la carga de trabajo media del sistema.

(c) Dada una llamada procedente del área de respuesta  $n$  en un tiempo  $t$ , la probabilidad de que sea atendida por un vehículo de otra área de respuesta será la suma de las dos siguientes probabilidades:

- Probabilidad de que un vehículo  $n$  no se halle disponible
- Probabilidad de que un vehículo  $n$  esté disponible pero no sea el más próximo al lugar de la llamada

La primera probabilidad es  $\rho_n(t)$ . Dado que la probabilidad condicional de que ese vehículo  $n$  no se halle asignado a la llamada, suponiendo que se encuentre disponible, es  $(1 - a_n(t))$ , la segunda probabilidad viene dada por la expresión  $(1 - \rho_n(t))$ . Por lo tanto, dada una llamada aleatoria que llega en el intervalo  $[0, T]$ , la probabilidad de que llegue entre  $t$  y  $t+dt$ , que sea del área de respuesta  $n$  y que resulte en un envío al área entre respuestas será

$$(\rho_n(t) + (1 - \rho_n(t))(1 - a_n(t))) \frac{\lambda_n(t)dt}{\lambda T} = (1 - a_n(t) + \rho_n(t)a_n(t)) \frac{\lambda_n(t)dt}{\lambda T}.$$

La probabilidad de que un envío aleatorio que se produce en  $[0, T]$  sea un envío al área entre respuestas  $f_I$ , se obtiene del siguiente modo:

$$f_I = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=1}^N (1 - a_n(t) + \rho_n(t)a_n(t)) \frac{\lambda_n(t)}{\lambda} dt.$$

Evidentemente,  $f_I$  tiene un valor más alto que en el caso de que el vehículo del sector tenga siempre la primera preferencia, ya que no se asigna un vehículo a una llamada dentro de su sector cuando no es el más próximo del que se puede disponer. Si  $a_n(t) = 1$ , quiere decir que el vehículo del sector siempre tiene la primera preferencia. Por tanto el valor anterior de  $f_I$  se reduce a la ecuación (5.55). Al disminuir  $a_n(t)$ , aumenta la posibilidad de un envío al área entre respuestas. Si  $a_n(t) = 0$ , ello implica que todas las llamadas son atendidas por envíos al área entre respuestas y que, por lo tanto,  $f_I = 1$ .

(d) La probabilidad de que la primera llamada que espera en cola sea atendida por un envío al área entre respuestas equivale a la de que el primer servidor disponible no sea el vehículo del sector en el que se ha producido la llamada. Como la primera llamada que espera en cola es totalmente aleatoria y cada vehículo tiene idénticas posibilidades de ser el primer servidor disponible, tenemos

$$f_I = \frac{N-1}{N} \Rightarrow 1 - f_I = \frac{1}{N}.$$

Este resultado implica que si se permite que se forme una cola y el sistema se halla próximo a la saturación,  $f_I$  es constante, sea cual sea la estrategia de envío aplicada. (De hecho, no existe la libertad de elegir un vehículo para que atienda a una llamada que espera en cola). Por el contrario, si las llamadas que llegan cuando todos los vehículos están ocupados se pierden,  $f_I$  sí que depende de la estrategia empleada, como hemos visto anteriormente. Por consiguiente, la importancia práctica de  $f_I$  varía si se permite la formación de una cola.

## 6. Problema 5.18 LO (Kang, 2001)

Llamemos  $N_0$  al número de vehículos existente antes de la incorporación de dos nuevas patrullas. Teniendo en cuenta únicamente el tiempo de desplazamiento (es decir, sin contar los tiempos de aceleración y deceleración) el tiempo de desplazamiento medio hasta una llamada nos viene dado por (véase la ecuación (5.69))

$$E[T] \approx \frac{c}{v_c} \sqrt{\frac{A_0}{N_0(1-\rho)}}$$

De los datos observados obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{c}{v_c} \sqrt{\frac{A_0}{N_0(1-\rho)}} = 5.82$$

$$\frac{c}{v_c} \sqrt{\frac{A_0}{(N_0+2)(1-\rho)}} = 5.28$$

Y, tomando la ratio de las ecuaciones, resulta

$$\sqrt{\frac{N_0 + 2}{N_0}} = \frac{5.82}{5.28}$$

Resolviendo la ecuación para  $N_0$ , obtenemos  $N_0 = 9,3$ . Es decir, había 9 ó 10 vehículos patrullando antes de la incorporación de los dos nuevos.