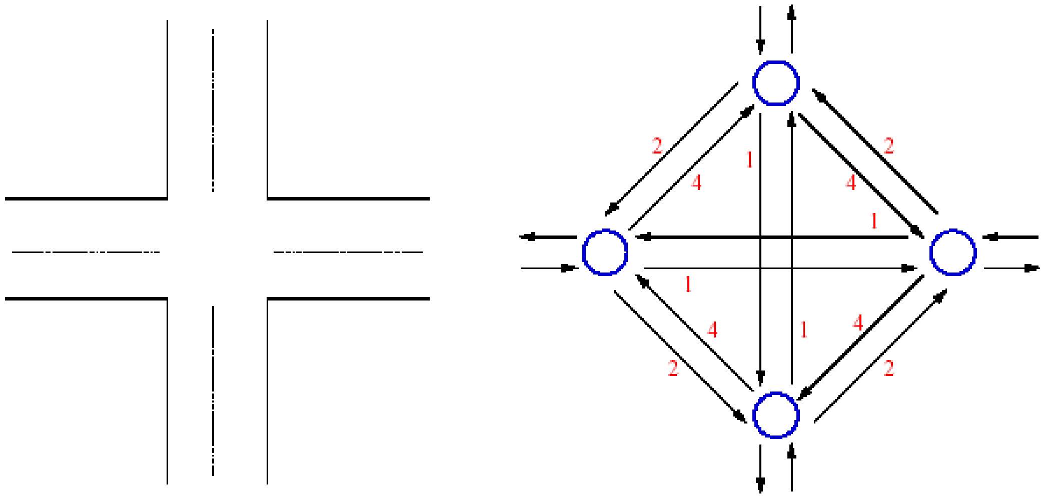
 Soluciones trabajo 6

1. **Problema 6.2 LO (Kang, 2001)**



2. **Problema 6.6 LO (Odoni, 1994)**

(a)

$$\sum_{i \in N} P_i = \sum_{i \in N} \{(\text{grado de entrada de i}) - (\text{grado de salida de i})\}$$
$$= \sum_{i \in N} (\text{g entrada de i}) - \sum_{i \in N} (\text{g salida de i})$$
$$= \sum_{i \in N} \sum_{(k,i) \in A} 1 - \sum_{i \in N} \sum_{(i,k) \in A} 1 = 0\,.$$

Estas dos últimas sumas tienen en cuenta cada arco dirigido de la red exactamente una vez: la suma de la izquierda lo hace desde el punto de vista de las colas y la suma de la derecha, desde el punto de vista de las cabezas. Por consiguiente, la diferencia entre ambas sumas es igual a cero (téngase en cuenta que cada arco (i,j) contribuye exactamente con un valor 1 al grado de salida de i y con un valor 1 al grado de entrada de j).

(b) Para obtener un recorrido de Euler dirigido, deberemos tener el valor $P'_i = 0$ para todos los nodos. Análogamente a la versión no dirigida, añadiremos arcos ficticios (i,j) entre los nodos de oferta $i \in S$ y los de demanda $j \in D$. Y, a diferencia de la versión no dirigida, en la que bastaba un arco adicional para convertir cualquier nodo impar en par, en este caso será necesario añadir varios arcos a un nodo cuyo $|P_i|$ sea elevado. A fin de minimizar la longitud total de los arcos añadidos, crearemos caminos de distancia mínima $\Sigma_{i \in S} P_i$ entre los nodos de oferta y los de demanda. Para asegurarnos de que $P'_i = 0$ para todos los nodos, es necesario que

$$\sum_{j\in D} x_{ij} = P_i,\ \forall i \in S$$

lo que implica que $P'_i = P_i$ – grado de salida de los nuevos arcos ficticios será igual a:

$$P_i - \sum_{j\in D} x_{ij} = 0$$

Del mismo modo, necesitamos que

$$\sum_{i\in S} x_{ij} = -P_j,\ \forall j \in D$$

para asegurarnos de que $P'_j = P_j$ + grado de entrada de los nuevos arcos ficticios sea igual a:

$$P_j + \sum_{i\in S} x_{ij} = 0$$

Aquí, x_{ij} indica el número de nuevos caminos ficticios entre los nodos i y j. Dado que ya sabemos que $P'_i = 0$, $i \in S$ y $P'_j = 0$; podemos construir el recorrido de Euler. Cabe la posibilidad también de emplear un mismo enlace más de una vez. (Véanse, por ejemplo, los arcos (d,e) y (b,a) del siguiente apartado).

(c) **Paso 1**: $S = \{b, d, g\}$ con $P_b = P_d = P_g$, y $D = \{a, e\}$ con $P_a = –2$, $P_e = –1$. Por inspección,

$$\begin{aligned} d(b,a) &= 5, & d(b,e) &= 17 \\ d(d,a) &= 14, & d(d,e) &= 3 \\ d(g,a) &= 20, & d(g,e) &= 9 \end{aligned}$$

Paso 2:

Minimizamos

$$z = 5x_{ba} + 17x_{be} + 14x_{da} + 3x_{de} + 20x_{ga} + 9x_{ge}$$

Con las condiciones siguientes

$$\begin{aligned} &x_{ba} + x_{be} = 1 \\ &x_{da} + x_{de} = 1 \\ &x_{ga} + x_{ge} = 1 \\ &x_{ba} + x_{da} + x_{ga} = 2 \\ &x_{be} + x_{de} + x_{ge} = 1 \\ &x_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

Únicamente hay tres soluciones viables con números enteros para este problema, por lo que indicaremos las mismas y comprobaremos el valor de la función objetiva en cada caso:

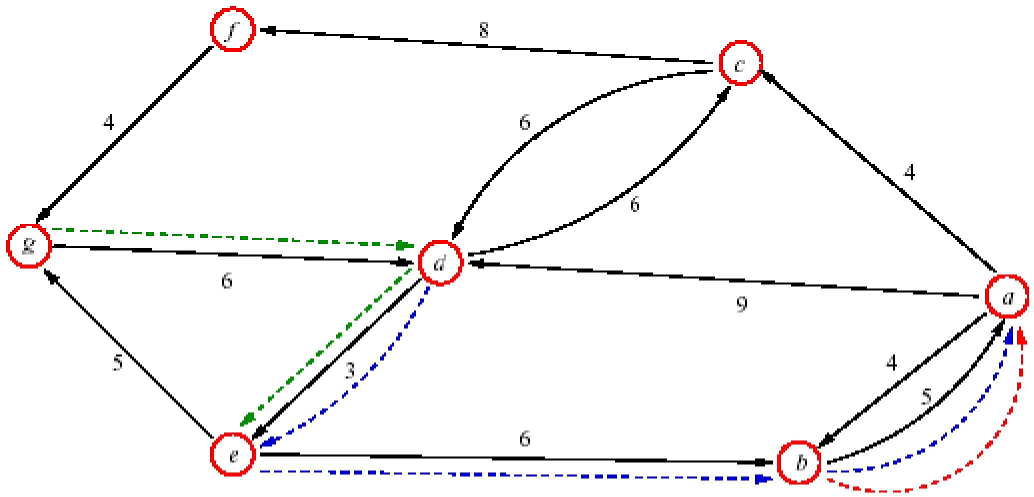
$$(1)\ \ x_{ba} = 1, x_{be} = 0, x_{da} = 1, x_{de} = 0, x_{ga} = 0, x_{ge} = 1:\ \ z = 5 + 14 + 9 = 28$$

$$(2)\ \ x_{ba} = 0, x_{be} = 1, x_{da} = 1, x_{de} = 0, x_{ga} = 1, x_{ge} = 0:\ \ z = 17 + 14 + 20 = 51$$

$$(3)\ \ x_{ba} = 1, x_{be} = 0, x_{da} = 0, x_{de} = 1, x_{ga} = 1, x_{ge} = 0:\ \ z = 5 + 3 + 20 = 28$$

Tanto la solución 1 como la 3 son óptimas. Elegiremos la solución 1.

Paso 3: Añadimos caminos desde $b \to a$, $d \to a$ ($d \to e \to b \to a$), y $g \to e$ ($g \to d \to e$).



Paso 4: $b \to a \to c \to d \to c \to f \to g \to d \to e \to g \to d \to e \to b \to a \to d \to e \to b \to a \to b$ es un recorrido posible.

(d) El método sugerido nos obliga a atravesar dos veces cada arco no dirigido (una vez en cada sentido), lo que puede no resultar óptimo.

3. Problema 6.14 Lo (Pinker, 1994; Chew, 1997; Kang, 2001)

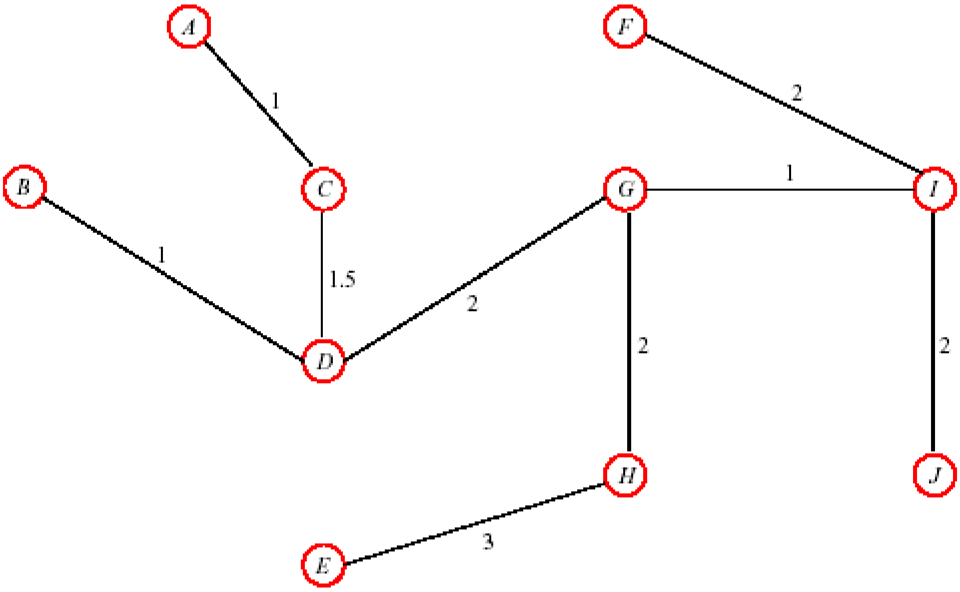
Partimos de que la longitud del arco (*C*,*D*) es 1,5.

(a) Se trata de un problema de mediana-1 de Hakimi. La matriz de distancia mínima para la red es

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	$\sum_j h_j\, d(i,j)$
A	0	3	1	2.5	6	3	4.5	6.5	5	7	108
B	3	0	2	1	4	5	3	5	4	6	93
C	1	2	0	1.5	5	3	3.5	5.5	4.5	6.5	89
D	2.5	1	1.5	0	3.5	4.5	2	4	3	5	76.5
E	6	4	5	3.5	0	7.5	5	3	6	6	121
F	3	5	3	4.5	7.5	0	2.5	4.5	2	4	97
G	4.5	3	3.5	2	5	2.5	0	2	1	3	**72.5**
H	6.5	5	5.5	4	3	4.5	2	0	3	3	96.5
I	5	4	4.5	3	6	2	1	3	0	2	85
J	7	6	6.5	5	6	4	3	3	2	0	115

A partir de los valores de $\Sigma hjd(i, j)$ vemos que la mediana-1 se encuentra en el nodo *G*.

(b) Este problema consiste en la determinación de un árbol de expansión mínima, que se muestra en la siguiente figura. La longitud total de esta red de "arteria de emergencia" es de 15,5.



(c) Para resolver esta parte del problema deberemos hallar la mediana-1 y el centro absoluto del árbol de expansión mínima creado en el apartado anterior.

Comenzaremos por hallar la mediana-1. Existe para ello un método sencillo, llamado el teorema de la mayoridad. Sin embargo, como no fue tratado en clase, hallaremos la mediana-1 mediante el método "normal". Como muestra la siguiente tabla, la mediana-1 se encuentra en el nodo *G*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	$\sum_j h_j d(i,j)$
A	0	3.5	1	2.5	9.5	7.5	4.5	6.5	5.5	7.5	143
B	3.5	0	2.5	1	8	6	3	5	4	6	115.5
C	1	2.5	0	1.5	8.5	6.5	3.5	5.5	4.5	6.5	118
D	2.5	1	1.5	0	7	5	2	4	3	5	92.5
E	9.5	8	8.5	7	0	8	5	3	6	8	161.5
F	7.5	6	6.5	5	8	0	3	5	2	4	123.5
G	4.5	3	3.5	2	5	3	0	2	1	3	**74.5**
H	6.5	5	5.5	4	3	5	2	0	3	5	104.5
I	5.5	4	4.5	3	6	2	1	3	0	2	85.5
J	7.5	6	6.5	5	8	4	3	5	2	0	127.5

Para hallar el centro absoluto, deberemos determinar la distancia máxima desde cada nodo a los demás nodos, *m*(*k*).

Nodo k	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$m(k)$	9.5	8	8.5	7	9.5	8	**5**	6.5	6	8

Por lo tanto, el centro de vértice-1 se encuentra en *K*. A continuación realizamos la prueba (6.27) del libro de texto para eliminar los arcos en los que no puede estar el centro absoluto.

$$\text{arc } (A,C): \quad \frac{m(A)+m(C)-l(A,C)}{2} = \frac{9.5+8.5-1}{2} = 8.5 > 5$$

$$\text{arc } (C,D): \quad \frac{m(C)+m(D)-l(C,D)}{2} = \frac{8.5+7-1.5}{2} = 7 > 5$$

$$\text{arc } (B,D): \quad \frac{m(B)+m(D)-l(B,D)}{2} = \frac{8+7-1}{2} = 7 > 5$$

$$\text{arc } (D,G): \quad \frac{m(D)+m(G)-l(D,G)}{2} = \frac{7+5-2}{2} = 5 = 5$$

$$\text{arc } (G,H): \quad \frac{m(G)+m(H)-l(G,H)}{2} = \frac{5+6.5-2}{2} = \mathbf{4.75 < 5}$$

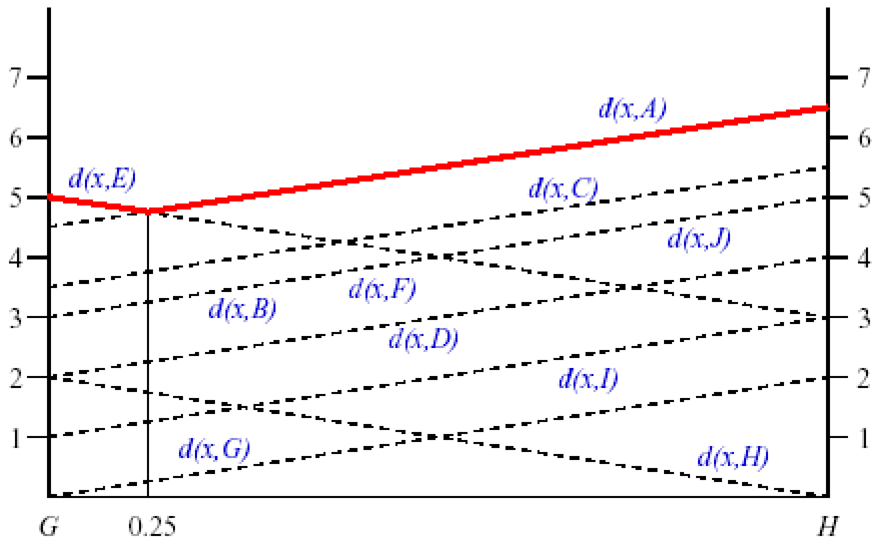
$$\text{arc } (H,E): \quad \frac{m(H)+m(E)-l(H,E)}{2} = \frac{6.5+9.5-3}{2} = 6.5 > 5$$

$$\text{arc } (G,I): \quad \frac{m(G)+m(I)-l(G,I)}{2} = \frac{5+6-1}{2} = 5 = 5$$

$$\text{arc } (I,F): \quad \frac{m(I)+m(F)-l(I,F)}{2} = \frac{6+8-2}{2} = 6 > 5$$

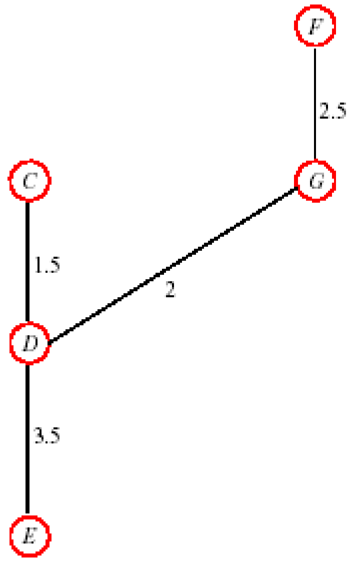
$$\text{arc } (I,J): \quad \frac{m(I)+m(J)-l(I,J)}{2} = \frac{6+8-2}{2} = 6 > 5$$

La prueba muestra que para hallar el centro absoluto debemos tomar en consideración únicamente el arco (*G*, *H*).

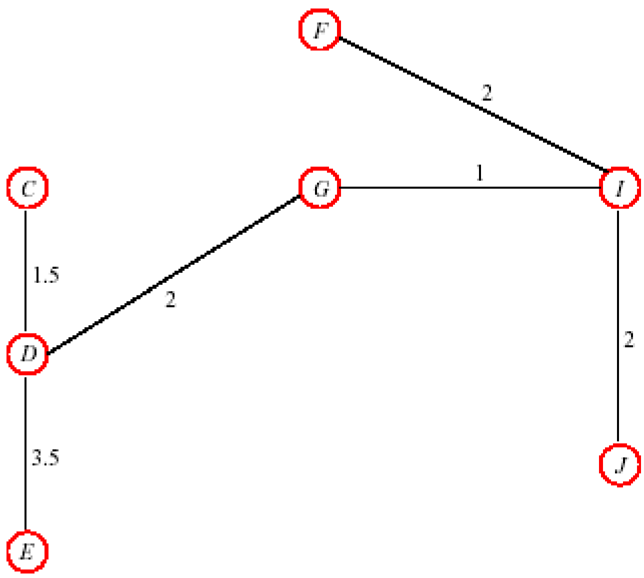


De la figura anterior se desprende que el centro absoluto se halla a 0,25 unidades de distancia del nodo *G* en el arco (*G*, *H*). Existe asimismo otro método sencillo para hallar el centro absoluto de un árbol, basado en el algoritmo de árbol de centro único que se describe en la sección 6.5.4. Veamos una breve descripción de este método. Se empieza por hallar el camino más largo del árbol. Según el teorema de Handler, el centro absoluto del árbol será el punto medio del camino. En el árbol de expansión mínima que hemos visto anteriormente, el camino más largo es A – C – D – G – H – E, y tiene una longitud igual a 9,5. El centro absoluto se halla por tanto situado en el punto medio de este camino; es decir, a 4,75 unidades del nodo A o del nodo E o, lo que es lo mismo, a 0,25 unidades del punto *G* del arco (*G*, *H*).

(d) La subred de longitud mínima que conecta los nodos *E*, *G*, *C* y *F* es



(e) La subred de longitud mínima que conecta los nodos *E*, *G*, *C*, *F* y *J* es

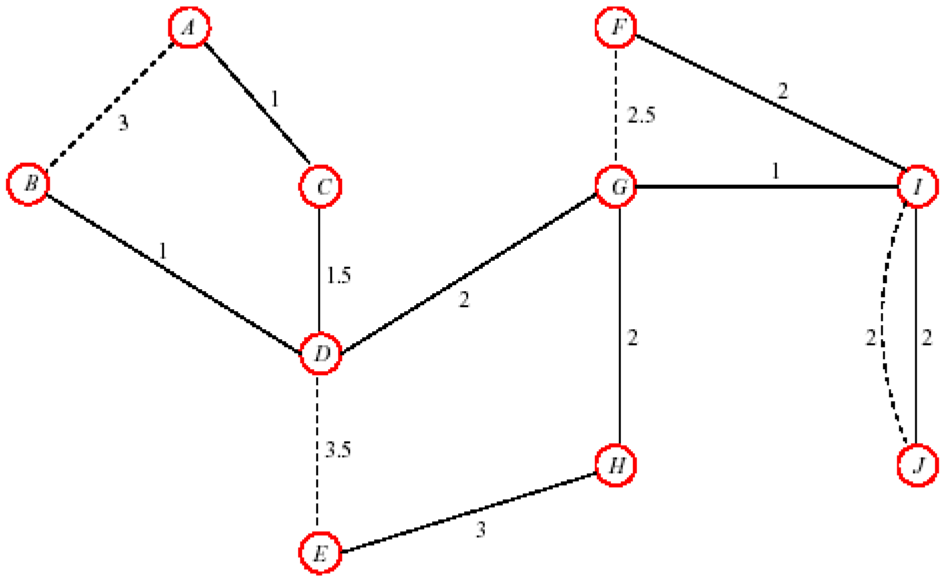


(f) Ambos subgrafos son árboles de Steiner con respecto al subconjunto de nodos de demanda requeridos. El problema del árbol de Steiner es una variante NP-completa del problema del árbol de expansión mínima.

(g) Los siguientes pasos son propios de la heurística de Cristofides:

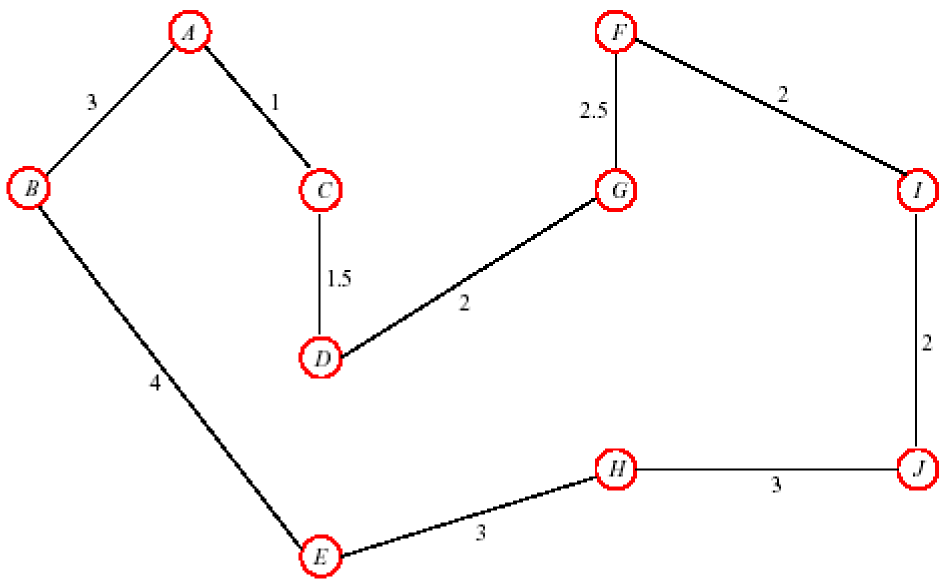
Paso 1: Hallar un árbol de expansión mínima, con referencia al obtenido en el apartado (b).

Paso 2: Hallar una correspondencia entre pares de distancia mínima. Los nodos de grado impar son *A, B, D, E, F, G, I* y *J*. La correspondencia será *A–B, D–E, F–G* e *I–J*.



Paso 3: Diseñar un recorrido de Euler. Una posible opción, desde el nodo A, es $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$ con una longitud total de 26,5.

Paso 4: Mejorar el recorrido diseñado. Si lo modificamos de tal forma que no se pase por un nodo más de una vez, obtendríamos el siguiente recorrido, con una longitud de 24.



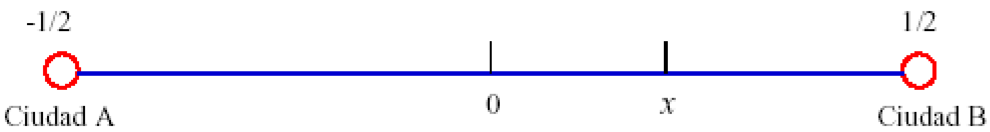
De hecho, podríamos hallar otro recorrido de longitud aún menor: $A \to C \to B \to D \to E \to H \to J \to I \to G \to F \to A$ con una longitud de 22.

(h) Aplicamos el algoritmo del problema del cartero chino (6.5). Los nodos impares son A, D, E e I, y disponemos de tres opciones para emparejar los nodos de grado impar (utilizaremos los caminos más cortos entre los nodos identificados en a)):

Correspondencia entre pares	A – D, E – I	A – I, D – E	A – E, D –I
Longitud total de la correspondencia	8,5	8,5	9

Dado que las dos primeras correspondencias no nos interesan, elegiremos arbitrariamente el emparejamiento *A – D* y *E – I*, lo que supone que añadimos al grafo los arcos (*A*, *C*), (*C*, *D*), (*E*, *H*), (*H*, *G*) y (*G*, *I*). En este grafo aumentado, ya podemos hallar un recorrido de Euler con una longitud 43,5 + 8,5 = 52.

4. Problema 6.17 LO (Kang, 2001)



(a) Llamaremos S al tiempo de servicio (tiempo de desplazamiento + tiempo en el lugar del evento) para un paciente aleatorio. Dado que la velocidad de desplazamiento υ es 1 y que el tiempo en el lugar de la incidencia τ es también 1, obtenemos la siguiente función de masa de probabilidad para el tiempo de servicio:

$$p_S(s) = \begin{cases} f_A, & s = 2(0.5 + x) + 1 \\ f_B, & s = 2(0.5 - x) + 1 \end{cases}$$

A partir de esta función de masa de probabilidad, obtenemos

$$E[S] = f_A\big(2(0.5 + x) + 1\big) + f_B\big(2(0.5 - x) + 1\big) = 2(f_A - f_B)x + 2\,,$$
$$E[S^2] = f_A\big(2(0.5 + x) + 1\big)^2 + f_B\big(2(0.5 - x) + 1\big)^2 = 4x^2 + 8(f_A - f_B)x + 4$$

Si llamamos R al tiempo de respuesta a un paciente aleatorio; tendremos $E[R] = W_q + E[S]$, donde W_q es el tiempo medio de espera en cola. Aplicando la fórmula a W_q en el sistema de colas M/G/1:

$$\begin{aligned} E[R] &= \frac{\lambda(E[S]^2 + \sigma_S^2)}{2(1 - \lambda E[S])} + E[S] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} + E[S] \\ &= \frac{\frac{1}{4}\{4x^2 + 8(f_A - f_B)x + 4\}}{2\{1 - \frac{1}{4}(2(f_A - f_B)x + 2)\}} + 2(f_A - f_B)x + 2 \\ &= \frac{x^2 + 2(f_A - f_B)x + 1}{1 - (f_A - f_B)x} + 2(f_A - f_B)x + 2\,. \end{aligned}$$

(b) Si $f_A = f_B = 1/2$; $E[R] = x^2 + 3$. El valor de x que minimiza $E[R]$ es 0. Por lo tanto, la localización óptima del hospital será el punto medio entre las dos ciudades.

(c) La respuesta al anterior apartado no es conforme al teorema de Hakimi ya que, si se siguiera éste, la localización óptima se hallaría en la ciudad A o en la ciudad B. De hecho, si se ubica el hospital en una de las dos ciudades, el valor de $E[R]$ se maximiza. Nótese que $E[R]$ es una función convexa de x, y que el teorema de Hakimi se aplica cuando la función de desutilidad que se va a minimizar es cóncava (o bien cuando, análogamente, la función de utilidad que se va a maximizar es convexa. Véase el teorema en la sección 6.5.3 del libro de texto). También hemos visto en clase que, por lo general, la mediana de cola estocástica no se halla en los nodos.

(d) Para que el sistema alcance el estado estacionario $\rho = \lambda E[S]$ deberá ser menor que 1. Al ser $E[S]$ una función de x, la cuestión de si se alcanza el estado estacionario dependerá de la localización del hospital.

(e) Como no se permiten colas, $W_q = 0$. Por tanto, deseamos hallar el valor de x que minimice

$$E[R] = E[S] = 2(f_A - f_B)x + 2 = 1.2x + 2\,.$$

$E[S]$ se minimiza cuando x = –0,5, por lo que el hospital deberá estar situado en la ciudad A, lo que es un ejemplo de que la mediana de pérdida estocástica es una mediana Hakimi.

(f) Para esta pregunta podemos definir el siguiente modelo de optimización lineal:

Minimizamos	$1{,}2\,x + 2$
Con las siguientes condiciones	$2(0{,}5 + x) + 1 \leq 2{,}6$
	$2(0{,}5 - x) + 1 \leq 2{,}6$
	$-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$

Las dos primeras condiciones dan como resultado $-0{,}3 \leq x \leq 0.3$ (la tercera condición es redundante). Dado que la función objetiva es ascendente, el valor óptimo de x será –0,3.

5. (Larson, 1999)

(a) Tanto los nodos 4 y 6 como los nodos 3 y 4 son medianas-2 de Hakimi.
(b) El vector de máxima distancia es

Nodo k	1	2	3	4	5	6
$m(k)$	8	**6**	8	**6**	7	**6**

Por lo que los nodos 2, 4 y 6 son todos ellos centros de un vértice.

(c) El cálculo del centro absoluto no presenta especial dificultad si nos atenemos a la simetría del problema. Únicamente hay que inspeccionar los arcos (2, 3), (2, 6), (3, 6) y (5, 6). Además, si nos fijamos en el arco (2, 6), el centro local está a 1 unidad de distancia del nodo 2 (el punto medio del arco) y la distancia máxima es 5. Atendiendo al anterior vector de distancia máxima, extraemos la siguiente conclusión:

$$\frac{m(2)+m(3)-l(2,3)}{2} = \frac{6+8-4}{2} = 5.0$$

⇒ Podemos descartar el arco (2,3)

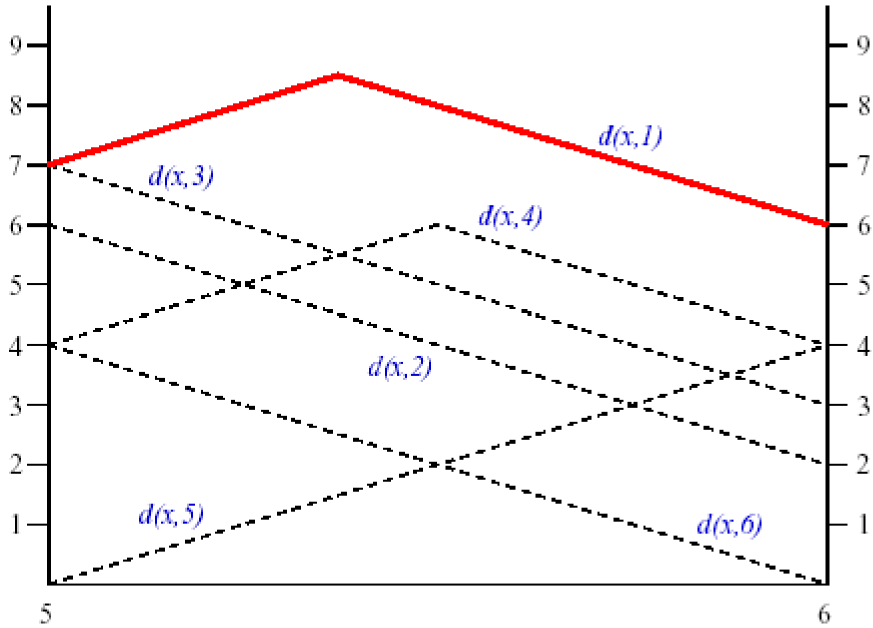
$$\frac{m(3)+m(6)-l(3,6)}{2} = \frac{8+6-3}{2} = 5.5$$

⇒ Podemos descartar el arco (3, 6)

$$\frac{m(5)+m(6)-l(5,6)}{2} = \frac{7+6-4}{2} = 4.5$$

⇒ Debemos fijarnos en el arco (5, 6)

Si buscamos el centro local en el arco (5,6), obtenemos

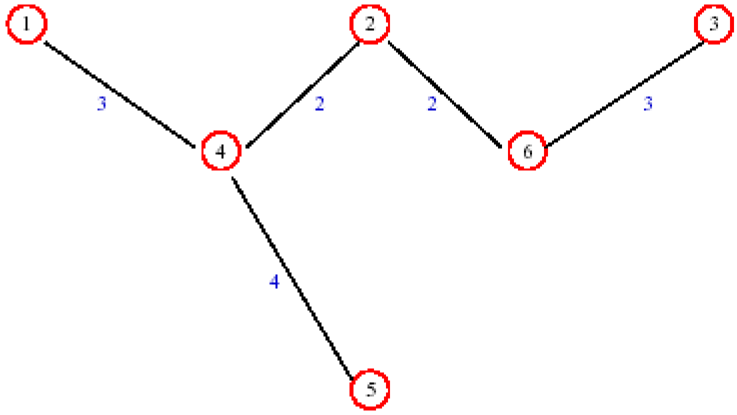


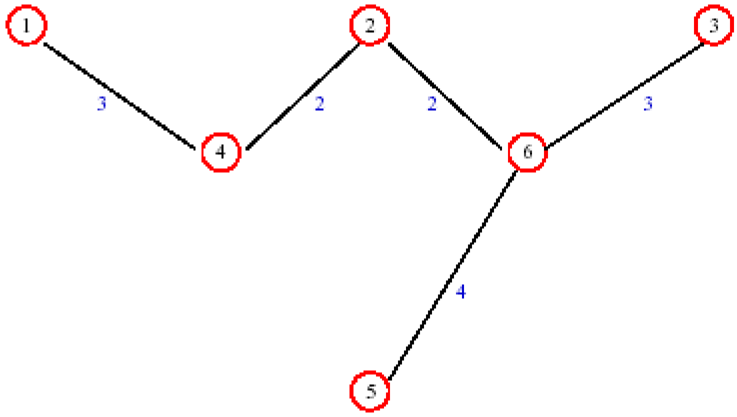
Obsérvese que el centro local del arco (5,6) se halla en el nodo 6 con la máxima distancia de 6, que es mayor que la distancia máxima desde el centro local del arco (2,6). De ello deducimos que, por simetría, hay dos centros absolutos situados en el centro del arco (2,6) y del arco (2,4) respectivamente.

(d) (i) Podemos crear dos árboles de expansión mínima (véase la página siguiente) mediante el algoritmo 6.3 del libro de texto (algoritmo de Prim). La longitud de este árbol será 14.

(ii) Como estamos buscando el centro absoluto de un árbol, aplicaremos el algoritmo de árbol de centro único (teorema de Handler). Así, el centro absoluto del primer árbol de expansión mínima estará situado en el arco (2,4), a 0,5 unidades de distancia de 2.

(e) Los nodos de grado impar son 3, 4, 5 y 6, siendo la correspondencia óptima entre pares 3 – 6 y 4 – 5.





De lo que resulta que la longitud del recorrido del cartero chino es 34 + 3 + 4 = 41

(f) (i) El límite de la distancia de desplazamiento equivalente entre los dos hospitales atraviesa los nodos 2 y 5.

(ii) Llamemos Hospital 1 y Hospital 2 a los hospitales situados en el centro del enlace (1,4) y del enlace (3,6) respectivamente. Intuitivamente, podemos suponer que el área óptima de respuesta primaria del Hospital 2 será menor que la del Hospital 1, al ser mayor la posibilidad de recibir una llamada más próxima al Hospital 2. Para hallar el valor de s_0 aplicaremos la fórmula de Carter, Chaiken e Ignall (véase la sección 5.3.4).

$$s_0 = \frac{2\eta}{2\eta + 1}(T_2(B) - T_1(B))$$

Para calcular η; T_1 (B) y T_2 (B):

$$\eta = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{1}{2}$$

$$T_1(B) = \left\{1.5\left(\frac{1}{10}\right) + 3.5\left(\frac{1}{10}\right) + 7.5\left(\frac{1}{4}\right) + 1.5\left(\frac{1}{5}\right) + 5.5\left(\frac{1}{10}\right) + 5.5\left(\frac{1}{4}\right)\right\}\frac{2}{c} = \frac{9.2}{c}$$

$$T_2(B) = \left\{7.5\left(\frac{1}{10}\right) + 3.5\left(\frac{1}{10}\right) + 1.5\left(\frac{1}{4}\right) + 5.5\left(\frac{1}{5}\right) + 5.5\left(\frac{1}{10}\right) + 1.5\left(\frac{1}{4}\right)\right\}\frac{2}{c} = \frac{7.0}{c}$$

Insertando los números en la fórmula, obtenemos:

$$s_0 = -\frac{1.1}{c} \;\Rightarrow\; \frac{s_0}{2} = -\frac{0.55}{c}.$$

Luego el límite óptimo se hallará ligeramente hacia el este de los nodos 2 y 5. (Nótese que el valor de c es finito, aunque muy alto). De todo ello concluimos que los nodos 1, 2, 4 y 5 se hallan dentro del área de respuesta primaria del Hospital 1, y los nodos 3 y 6 dentro de la del Hospital 2.