

8.07 Otoño 2001 – Prueba 2

Duración: 2 horas. No se pueden utilizar libros ni apuntes, aunque sí se permite el uso de hojas de fórmulas.

Problema 1. (15 puntos) Ejercicios con un solenoide. Considere un solenoide de radio R , N vueltas por unidad de longitud y una corriente alineada a lo largo del eje z .

(i) (5 puntos) Proporcione la expresión para la matriz del tensor de tensión en cualquier punto dentro del solenoide.

(ii) (5 puntos) Calcule la energía almacenada en el solenoide por unidad de longitud.

(iii) (5 puntos) Calcule la auto inductancia por unidad de longitud.

Problema 2. (25 puntos) Considere un condensador constituido por dos placas conductoras circulares, ambas de radio a . Una placa se ubica en el plano xy centrado en el origen y la otra en algún plano $z > 0$ paralelo a la primera placa y centrado también en el origen en $x = y = 0$. Existe un campo eléctrico intermitente entre las placas de la forma siguiente en la dirección z :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_z \quad (1)$$

En este caso, E_0 es una constante y \vec{E} es independiente de z y de la distancia radial ρ al eje z . Este es el término principal en el cálculo que realizaremos de los campos reales entre las placas.

(i) (10 puntos) Debido al campo eléctrico intermitente en (1), habrá un campo magnético inducido $\vec{B}(\rho, t)$. Halle la magnitud y la dirección de este campo magnético (Consejo: utilice la forma integral de la ecuación de Maxwell: $\nabla \times \vec{B} = \dots$).

(ii) (10 puntos) Debido al campo eléctrico intermitente calculado anteriormente, habrá un nuevo campo magnético \vec{E}_1 en la dirección z que, por la definición anterior de E_0 , puede ser necesario para satisfacer $\vec{E}_1(\rho=0) = 0$. Utilice la ley de Faraday para calcularlo. Es conveniente utilizar un contorno cerrado que incluya el eje z .

(iii) (5 puntos) Suponga que el campo eléctrico calculado en (1) y E_1 calculado anteriormente son una buena aproximación al campo eléctrico exacto. ¿Para qué valor del radio a podríamos cerrar el condensador para transformarlo en una cavidad cilíndrica resonante conductora cerrada? Expresar su respuesta como $a = \gamma \frac{c}{\omega_0}$, donde γ es una constante que usted debe determinar. [En el cálculo exacto $\gamma \approx 2,40486$ es el primer cero de la función de Bessel $J_0(x)$].

Problema 3. (25 puntos) Potenciales retardados.

Suponga que el plano xy neutral desde el punto de vista eléctrico, lleva una corriente de superficie uniforme $\vec{K} = K(t)\vec{e}_y$, pero dependiente del tiempo. Aquí, $K(t)$ es alguna función arbitraria que se desvaneció: $K(-\infty) = 0$.

(i) (5 puntos) Por la invariancia traslacional, el potencial vectorial \vec{A} en un punto (x, y, z) depende únicamente de z . Utilice la fórmula del potencial retardado para escribir una expresión integral para el potencial vectorial $\vec{A}(z, t)$ en un punto $P = (0, 0, z)$, siendo $z > 0$. Simplifíquela de forma que la variable de integración sea la distancia radial ρ al origen en el plano xy .

(ii) (10 puntos) Demuestre que el potencial vectorial retardado se puede escribir de una forma increíblemente sencilla:

$$\vec{A}(z, t) = \frac{\mu_0 c}{2} \vec{e}_y \int_0^\infty K\left(t - \frac{z}{c} - u\right) du$$

(iii) (10 puntos) Proporcione expresiones integrales para \vec{E} y \vec{B} , y realice las integrales escribiéndolas como derivadas totales.

Problema 4. (35 puntos) Una onda polarizada de forma circular que se mueve en la dirección z tiene una extensión finita en las direcciones x e y . Una descripción aproximada de dicha onda viene dada por ($e^{-i\omega t}$ implícito, E_0 real).

La condición de extensión finita significa que $E_0(x, y)$ desaparece cuando x o y sean infinitos. El campo anterior es una buena aproximación cuando los términos derivativos son pequeños.

(i) (10 puntos) ¿Se satisface la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ exactamente por este *ansatz*? (La ecuación de Maxwell $\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$ se satisface únicamente de forma aproximada).

A continuación, tratamos de calcular el momento angular promediado $\langle \vec{L}_z \rangle$ transportado por esta onda en la dirección de propagación. La densidad L de momento angular viene dada por:

$$\begin{aligned} \langle \vec{L} \rangle &= \frac{\epsilon_0}{2} \vec{x} \times \text{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2c} \vec{x} \times \text{Re}(i\vec{E} \times \vec{E}^*) = \frac{\epsilon_0}{2c} \vec{x} \times (i\vec{E} \times \vec{E}^*) \end{aligned}$$

y al expandirla, el componente z de la densidad del momento angular es:

$$\langle \vec{L}_z \rangle = \frac{\epsilon_0}{2c} \left(x(i\vec{E} \times \vec{E}^*)_y - y(i\vec{E} \times \vec{E}^*)_x \right).$$

Por lo tanto, es necesario que calculemos los componentes x e y de $(i\vec{E} \times \vec{E}^*)$.

(ii) (10 puntos) Demuestre, sin cálculo explícito, que, tal y como se puso anteriormente, $(i\vec{E} \times \vec{E}^*)$ es real (algo es real si es igual a su conjugado complejo). Calcule los componentes x e y de $(i\vec{E} \times \vec{E}^*)$. Observe que se pueden escribir como derivadas totales.

Para evitar obtener una respuesta infinita para el momento angular que transporta esta onda, considere el volumen entre $z = 0$ y $z = a$.

(iii) (10 puntos) Demuestre que el momento angular total (promediado) que transportan los campos en la placa se puede escribir de la forma siguiente:

$$\langle \vec{L}_z \rangle_{slab} = K \int_0^a dz \int dx dy E_0^2(x, y)$$

¿Cuál es el valor de K ? (Consejo: utilizará integración por partes en las direcciones x , y).

(iv) (5 Puntos) ¿Cuál es la relación entre $\langle \vec{L}_z \rangle_{placa}$ y la aproximación no derivativa a la densidad de energía $\langle u \rangle$ que transporta la onda?