8.07 Tareas para casa 1

Problema 1. Griffiths 1.2 (pág.4), Griffiths 1.6 (pág.8).

Problema 2. Griffiths 1.12 (pág.15), Griffiths 1.13 apartado (a) , únicamente (pág.15).

Problema 3. Evalúe (i) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell jk}$, y (ii) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$.

Problema 4. Utilice la notación índice para demostrar que:

(i) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\Big[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})\Big] = (abc)^2$. Aquí se define $(abc)\equiv\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$.

Problema 5. Utilice la notación índice para demostrar que:

(i) $\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})$.

(ii) $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a}) + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}$

Problema 6:

(i) Considere una matriz A de 3×3 con elementos matriciales A_{ij}. Demuestre, mediante expansión explícita que

$$\det A = \epsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \quad .$$

(ii)Demuestre que $\det\ A = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mp}A_{i\ell}A_{jm}A_{kp}$.

Problema 7: (desafío) Ejes oblicuos.

(i)Demuestre que (en tres dimensiones), para un valor arbitrario B_i tenemos:

$$B_{ijk\ell} \equiv B_i\epsilon_{jk\ell} - B_j\epsilon_{ik\ell} - B_k\epsilon_{ji\ell} - B_\ell\epsilon_{jki} = 0\,. \tag{1}$$

(ii)Dados los vectores no coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, compruebe las siguientes descomposiciones de un vector arbitrario $\vec{d}$

$$\vec{d} = (\vec{d}\cdot\vec{a})\,\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(abc)} + (\vec{d}\cdot\vec{b})\,\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{(abc)} + (\vec{d}\cdot\vec{c})\,\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{(abc)}\,, \tag{2}$$

$$\vec{d} = \frac{(dbc)}{(abc)}\,\vec{a} + \frac{(adc)}{(abc)}\,\vec{b} + \frac{(abd)}{(abc)}\,\vec{c}\,. \tag{3}$$

Consejo: Utilice(1) para demostrar (2).

(iii)¿Cómo se comportan los productos escalares entre los vectores de base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ y $\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(abc)}\,,\,\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{(abc)}\,,\,\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{(abc)}\right)$?