

8.07 Otoño 2002 – Prueba 1

Duración: 1 hora y media. No se permite el uso de libros y apuntes, aunque sí está permitido utilizar hojas de fórmulas.

Problema 1. (30 puntos) Tres ejercicios:

(a) (10 puntos) Considere el campo de vector tridimensional $\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$. ¿Podría ser \mathbf{F} un campo eléctrico? ¿Podría ser \mathbf{F} un campo magnético?

(b) (10 puntos) Utilice la notación índice para derivar una fórmula para $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son campos de vector. Presente su respuesta en forma de notación vectorial.

(c) (10 puntos) Un *tensor* B_{ijk} completamente anti-simétrico se puede escribir como $B_{ijk} = \epsilon_{ijk} B$. Proporcione el valor de B en lo que respecta a un componente de B_{ijk} . Indique las propiedades de tensor de B y demuestre su afirmación.

Problema 2. (30 puntos) Esfera conductora en un campo eléctrico.

Se ubica una esfera conductora *sin cargar* de radio a dentro de un campo eléctrico externo uniforme $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{z}}$. Seleccione el origen del sistema de coordenadas de forma que coincida con el centro de la esfera.

(a) (10 puntos) Calcule el potencial $V(r, \theta)$ fuera del conductor utilizando las soluciones axiales adecuadas y las condiciones de contorno en la superficie del conductor.

(b) (10 puntos) Calcule la carga de superficie $\sigma(\theta)$ en la superficie de la esfera conductora. Halle el momento dipolo eléctrico \mathbf{p} de esta distribución de carga.

(c) (10 puntos) ¿Podría haber anticipado el valor de \mathbf{p} a partir de su respuesta para $V(r, \theta)$ del apartado (a)? Razone su respuesta. ¿Tiene la distribución de carga en la superficie de la esfera un momento cuadrupolar de no desaparición? Razone su respuesta.

Problema 3. (20 puntos) Expansión multipolo.

Se ubica un trozo pequeño de cable a lo largo del eje z , centrado en el origen. El cable porta una carga total Q y la densidad de carga lineal λ es una función par de z : $\lambda(z) = \lambda(-z)$. La longitud del valor rms de la distribución de carga en el cable es $(Ql_0^2 = \int_{\text{cable}} z^2 \lambda(z) dz)$.

(a) (10 puntos) halle los momentos dipolares y cuadrupolares para esta distribución de carga.

(b) (10 puntos) Proporcione una expresión para el potencial $V(r, \theta)$ para r grande, incluyendo la contribución cuadrupolar, y escriba el resultado con la ayuda del o de los polinomios necesarios de Legendre. ($P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$)

Problema 4. (20 puntos) Función de Green

Considere el problema del valor de contorno de Dirichlet en el que se especifica el potencial sobre el plano xy y en el que la región de interés es $z \geq 0$ (Esta situación se analizó en clase).

(a) (5 puntos) Considere una unidad de carga en $(0, 0, z)$. Proporcione la posición y la magnitud de la carga o cargas de la imagen necesarias para hallar el potencial en la región deseada, suponiendo que se mantenga el plano xy en potencial cero.

(b) (5 puntos) Escriba una expresión explícita para la función de Green $G_D(0, 0, z; x', y', z')$ que se necesita para resolver el problema del valor de contorno de Dirichlet en el que el plano xy es la superficie de Dirichlet.

(c) (5 puntos) A continuación, considere el problema del valor de contorno en el que un potencial $V_0(x, y)$ se establece en el plano xy . Suponga que $\rho = 0$ sobre la región deseada. Escriba una expresión integral para el potencial $V(0, 0, z)$. Simplifique la expresión evaluando los derivados necesarios (le rogamos claridad).

(d) (5 puntos) A continuación, considere el caso en el que $V_0(x, y) = V_0$, es una constante en el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ y desaparece dentro de éste. Calcule $V(0, 0, z)$.