

8.07 Tareas para casa 4

Problema 1. Griffiths 3.1 (pág.115). Teorema de la media generalizado.

Problema 2. Griffiths 3.8 (pág.126). Esferas e imágenes.

Problema 3. Propiedad de simetría para la función de Green de Dirichlet.

Utilice las ecuaciones satisfechas por $G_D(\vec{x}_1, \vec{x}')$ y $G_D(\vec{x}_2, \vec{x}')$ y el teorema de Green con variables aplicadas, para demostrar que $G_D(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = G_D(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$.

Problema 4. Imágenes y funciones de Green.

Un plano conductor infinito (en el plano xy) con núcleo hemisférico de radio a está en potencial cero. Se coloca una carga q en el eje del núcleo (que se puede tomar como el eje z) a una distancia z de la placa.

(i) Halle un conjunto de imágenes adecuado para este problema. Demuestre que la carga es atraída hacia la placa con una fuerza:

$$\frac{q^2}{4z^2} + \frac{4q^2 a^3 z^3}{(z^4 - a^4)^2}.$$

(ii) Suponga que ahora tenemos un potencial arbitrario $V_0(\vec{x}')$ en la superficie bidimensional que ya no es conductor, y que se elimina la carga original (el potencial se toma para que sea cero en el infinito). Escriba una expresión integral para el potencial en cualquier lugar del eje z ($z > a$) utilizando una función de Green de Dirichlet. (No adorne mucho las derivadas normales, simplemente halle G y establezca la integral).

Problema 5. Imágenes cilíndricas (basadas en el problema 2.11 de Jackson).

Se ubica una carga de línea con densidad de carga lineal τ paralela al eje de un cilindro conductor de radio b , y a una distancia R de dicho cilindro, que se mantiene a una tensión fija, de tal forma que el potencial desaparece en el infinito.

(i) Halle la magnitud y la posición de la carga o cargas de la imagen.

(ii) Halle el potencia V_0 del cilindro en cuanto a R , b y τ .

Problema 6. Griffiths 3.15 (pág. 136). Ecuación de Laplace en un recuadro.

Problema 7. (Desafío) Capacitancia de un único conductor.

(i) Considere un sólo conductor y permita que V indique el volumen de espacio fuera del conductor. Demuestre que su capacitancia viene dada por:

$$C = \epsilon_0 \int_V |\nabla \Phi|^2 d^3x$$

donde $\Phi(\vec{x})$ es la solución para el potencial cuando el conductor se mantiene en potencial *unitario*.

(ii) Demuestre que la capacitancia real C siempre es menor que o igual a la cantidad,

$$C(\Psi) = \epsilon_0 \int_V |\nabla \Psi|^2 d^3x$$

donde Ψ corresponde a cualquier función de prueba que cumple la condición de contorno de potencial unitario en el conductor.

(iii) Demuestre que la capacitancia C' de un conductor con una superficie S' es menor que la capacitancia C de un conductor cuya superficie S encierra a S' .

(iv) Utilice (iii) para hallar los límites inferiores y superiores para la capacitancia de un cubo conductor de lado a .

Escriba su respuesta de la siguiente forma: $\alpha(4\pi\epsilon_0 a) < C_{cubo} < \beta(4\pi\epsilon_0 a)$ y halle las constantes α y β . Un cálculo numérico proporciona $C \approx 0,655(4\pi\epsilon_0 a)$. Compárelo con sus límites.