

8.07 Tareas para casa 11

Problema 1. Potenciales retardados.

Se ubica una lámina de carga con densidad s en el plano $z = 0$, tal que $\rho = s\delta(z)$.

(i) ¿Cuáles son los campos electrostáticos a través del espacio?

En el tiempo $t = 0$ la lámina comienza a moverse en la dirección y y con una velocidad constante v , tal que para $t > 0$, $j_y = sv\delta(z)$, $j_x = j_z = 0$.

(ii) Calcule el valor de $A_y(z, t)$ directamente a partir de la fórmula del potencial retardado. Trace su valor en función de t para un valor fijo de z (positivo y negativo) y también en función de z para un valor fijo $t > 0$.

(iii) Obtenga B_x y E_y y trácelos en función del tiempo en un valor fijo de z (positivo y negativo) y en función de z para un tiempo fijo $t > 0$.

Problema 2. Leyes de conservación en la composición del Problema 1.

Considere una caja limitada por los planos $z = \pm h$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. Esta caja se extiende una distancia h por encima y por debajo de la lámina de corriente. Explique *cuantitativamente* como funcionan las leyes de conservación para el volumen en los casos siguientes:

(i) Conservación de la energía para $0 < t < h/c$.

(ii) Conservación de la energía para $t > h/c$.

(iii) Conservación del componente y y de momento para $0 < t < h/c$.

(iv) Conservación del componente x y de momento para $t > h/c$.

La afirmación de conservación de la energía, por ejemplo, es:

$$\frac{d}{dt}(E_{mec} + E_{campo}) = - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}, \quad \text{con} \quad \frac{dE_{mec}}{dt} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x$$

Problema 3. Una onda plana que viaja a lo largo de la dirección z es generalmente incidente en un material uniforme que llena el medio espacio $z = 0$. El material tiene una conductividad constante $\mathbf{s} > 0$ ($\vec{J} = \mathbf{s}\vec{E}$) y $\mathbf{e}/\mathbf{e}_0 = \mathbf{m}/\mathbf{m}_0 = 1$. El campo incidente (para $z < 0$) tiene la forma siguiente:

$$\vec{E}_{inc}(\vec{r}, t) = Re \left\{ E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} \right\}, \quad (1)$$

siendo $k = \frac{\omega}{c}$ y E_0 constantes reales. Considere el simple *ansatz* para la onda en el conductor ($z > 0$) y para una onda reflejada:

$$\vec{E}_{\text{con}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_c(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right\}. \quad (2)$$

$$\vec{E}_{\text{ref}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ E_r e^{i(-kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \right\}, \quad (3)$$

En este caso, hay que hallar los vectores posiblemente complejos $\vec{E}_c(\vec{r})$ y E_r .

(i) Demuestre que $\vec{E}_c(\vec{r})$ satisface la ecuación diferencial:

$$\left\{ \nabla^2 + k^2 \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \right\} \vec{E}_c(\vec{r}) = 0. \quad (4)$$

(ii) A continuación, suponga que los campos en el conductor tienen la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{E}_c(\vec{r}) &= E_c e^{i\beta z} \hat{\mathbf{x}}, \\ \vec{B}_c(\vec{r}) &= B_c e^{i\beta z} \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (5)$$

¿Cuál es el valor de β con respecto a $k, \mathbf{s}, \mathbf{w}$? Halle B_c en cuanto a E_c .

(iii) Mediante las condiciones de contorno pertinentes para \vec{E} y \vec{B} en la frontera, establezca y resuelva el sistema de ecuaciones que determinan E_c y E_r con respecto a E_0 , k y β .

(iv) Halle la presión sobre la pared conductora. Expresé su respuesta en cuanto a E_c , k y β . [Consejo: utilice el tensor de tensión].

Problema 4. Calcule el campo eléctrico exacto para la radiación dipolar eléctrica. Demuestre que obtiene:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + (3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}$$

Problema 5. (Jackson, 9.3). Dos mitades de un armazón esférico metálico de radio R y conductividad infinita están separados por un espacio aislante muy pequeño. Se aplica un potencial alternativo entre las dos mitades de la esfera, de forma que los potenciales sean $\pm V \cos^? t$. En el límite largo de la longitud de onda halle los campos de radiación, la distribución angular de la potencia radiada y la potencia total radiada de esta esfera.

Problema 6. Griffiths 4.2 (pág. 163).

Problema 7. Griffiths 4.10 (pág. 169).

Problema 8. Griffiths 4.26 (pág. 193).

Problema 9. Griffiths 4.32 (pág. 198).

Problema 10. Griffiths 6.4 (pág. 259).

Problema 11. Griffiths 6.5 (pág. 260).

Problema 12. Imán de barra (basado en el problema 5.19 de Jackson y en el 6.9 de Griffiths).

Un imán de barra tiene la forma de un cilindro circular recto de longitud L y de radio a . El cilindro tiene una magnetización M_0 uniforme a lo largo de su volumen y paralela a su eje.

- (a) Calcule \mathbf{H} y \mathbf{B} en todos los puntos del eje del cilindro, dentro y fuera del imán.
- (b) Dibuje en un diagrama los radios $\mathbf{B}/\mu_0 M_0$ y \mathbf{H}/M_0 para $L/a = 5$.
- (c) Halle la corriente límite.
- (d) ¿Por qué se encuentra el campo \mathbf{B} alejado del imán, aproximadamente a la distancia de un dipolo magnético? ¿Cuál es el momento dipolar efectivo?