

8.07 Otoño 2001 – Prueba 1

Duración: 1 hora y media. No se permite el uso de libros y apuntes, aunque sí está permitido utilizar hojas de fórmulas.

Problema 1. (30 puntos) Tres ejercicios:

- (i) (10 puntos) Un anillo centrado alrededor del eje z y paralelo al plano xy tiene una carga Q distribuida uniformemente. Cualquier punto del anillo se encuentra a una distancia r_0 del origen, y cualquier línea que una el origen con el anillo forma un ángulo θ_0 con el eje z . Exprese la *densidad* de carga $\rho(\hat{x})$ utilizando las funciones delta en coordenadas esféricas.
- (ii) (10 puntos) Utilizando la notación índice, derive una fórmula en la que ψ sea una función escalar y \mathbf{F} una función vectorial. Presente su respuesta sin notación índice.
- (iii) (10 puntos) Sea T_{ij} un pseudo tensor de rango dos (bajo rotaciones). ¿Qué clase de objeto es $\delta_{ij} T_{ij}$? Demuestre su afirmación.

Problema 2. (20 puntos) Término principal de un potencial.

Halle el término principal para el potencial alejado $V(r, \theta)$ en el caso de una configuración de carga que consta de cuatro cargas $(q, -q, -q, +q)$ colocadas en el eje z y ubicadas en $z = +3a, +a, -a, -3a$, respectivamente.

Problema 3. (25 puntos) Esfera superconductora en un campo magnético constante.

- (i) (5 puntos) Considere un momento dipolar magnético de magnitud m ubicado en el origen y cuya dirección está alineada con el eje z . Proporcione una expresión para la inducción magnética \mathbf{B} utilizando coordenadas esféricas (olvídense de la función delta).
- (ii) (5 puntos) Exprese un campo magnético constante $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ que apunte en la dirección z utilizando coordenadas esféricas.

Una esfera superconductora de radio a se introduce dentro de una configuración externa uniforme de campo magnético con $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Dentro de un superconductor la inducción magnética debe desaparecer. Queremos hallar la inducción magnética \mathbf{B} fuera de la esfera. De hecho, demostrará que el campo magnético fuera de la esfera se puede representar como la suma del campo de un dipolo magnético centrado en el origen y del campo externo \mathbf{B}_0 .

- (iii) (10 puntos) Considere las condiciones de contorno pertinentes y determine el momento magnético del dipolo necesario. Proporcione la expresión del campo magnético exterior \mathbf{B} .
- (iv) (5 puntos) Calcule la densidad de corriente de superficie \mathbf{K} en la superficie de la esfera.

Problema 4. (25 puntos) Imágenes para un dipolo fuera de una esfera conductora.

Considere una esfera conductora conectada a tierra de radio a y centrada en el origen. En el exterior de la esfera, en el eje y y con la coordenada y , existe un dipolo eléctrico de punto ideal con momento dipolar p que apunta en la dirección y positiva. Halle el conjunto de imágenes que deberían ubicarse dentro de la esfera para poder resolver el potencial en cualquier lugar fuera de la esfera. Proporcione la posición, la dirección, etc. y escriba todos los valores con respecto a p , a e y . Consejos: un dipolo de punto ideal con momento dipolar de magnitud p se puede modelar como un par de cargas con carga $+q$ y $-q$ separadas por una distancia d , siendo $p = qd$ en el límite en el que la separación d llega a cero y la carga q a infinito, manteniendo el producto como una constante. Utilice dicho modelo para el dipolo que se encuentra fuera de la esfera, calcule las imágenes y tome los límites para interpretar.