9.641 Redes neuronales

Boletín de problemas

1. La neurona de **integración y disparo** es un modelo simple con un comportamiento de impulso o espiga, que sacrifica el realismo biofísico por la simplicidad matemática. En primer lugar, consideremos una neurona con una única sinapsis excitatoria. Por debajo del umbral, el potencial de la membrana V obedece a la ecuación diferencial

$$C_m \frac{dV}{dt} = -g_L(V - V_L) - g_E(V - V_E) + I_{apl} \qquad (1)$$

Si V alcanza el umbral V_θ , se dice que la neurona produce potenciales de acción o de espiga, y V se ajusta instantáneamente al valor de V_0. En una sinapsis excitatoria, normalmente suponemos que $V_E \setminus V_\theta$.

a. Respuesta como una función de la entrada I_{apl} actual aplicada, sin entrada sináptica (g_E =0).

i. Determine el umbral actual I_θ (o reobase) por debajo del cual la neurona se encuentra inactiva, y sobre el que ésta se dispara reiteradamente. El signo de I_θ dependerá de si V_θ está por encima o por debajo de V_L.

ii. Si I_{apl} se mantiene constante en el tiempo por encima del umbral, la neurona debería disparar potenciales de acción reiteradamente. Halle la relación entre la frecuencia de disparo ν y I_{apl} por encima del umbral.

iii. Muestre que ν tiene un comportamiento aproximadamente lineal I_{apl}, y determine el gradiente. Exponga el motivo de esta linealidad. [*Pista*: *log* (1 + *x*) ≈ *x* para *x* pequeña].

b. Respuesta como una función de entrada sináptica g_E , sin entrada (I_{apl} = 0) actual aplicada.

i. Determine la conductancia sináptica del umbral $g_{E\theta}$, por debajo del cual la neurona se encuentra inactiva, y sobre el que ésta se dispara reiteradamente.

ii. Halle la relación entre la frecuencia de disparo ν y la entrada g_E por encima del umbral.

iii. Muestre que ν tiene un comportamiento aproximadamente lineal para la entrada g_E grande, y determine el gradiente. Explique la razón de esta linealidad.

2. Una neurona de integración y disparo que recibe una entrada desde múltiples sinapsis, es modelada mediante la ecuación:

$$C_m \frac{dV}{dt} = -g_L(V - V_L) - \sum_j g_{syn,j}(V - V_{sync,j}) \qquad (2)$$

Con el fin de justificar la reducción de este modelo a las ecuaciones de tasa, desearíamos que los efectos de las múltiples sinapsis se combinaran linealmente. En clase señalamos que una condición suficiente es que todas las sinapsis compartan un potencial de inversión ($\forall j$, $V_{syn\ j} = V_{syn}$). No obstante, en la práctica, existen al menos dos clases distintas de potenciales de inversión: uno para la sinapsis inhibitoria y otro para la excitatoria.

Considere una neurona de integración y disparo con una única conexión excitatoria y una única conexión inhibitoria:

$$C_m \frac{dV}{dt} = g_L(V - V_L) - g_E(V - V_E) - g_I(V - V_I) \qquad (3)$$

donde $V_E > V_\theta$ y $V_I < V_\theta$.

a. Halle la tasa de disparo ν por encima del umbral, como función de las conductancias.
b. Calcule ν frente a g_E con los siguientes valores del parámetro:

C_m	0.5 nF
g_L	0.025 μs
g_I	0.0μs
V_L	-70 mV
V_θ	-52 mV
V_0	-59 mV
V_E	0 mV
V_I	-68 mV

c. Repita el cálculo anterior utilizando g_I= 0.02, 0.04 y 0.06. ¿Está contribuyendo la inhibición linealmente? ¿Por qué?

3. En clase debatimos el modo de aproximación a un modelo que produce potenciales de acción o espiga, con un modelo que no los produce. Aquí estudiaremos la calidad de esta aproximación, utilizando un modelo simplificado. Considere una única neurona del modelo de integración y disparo, estimulada por alguna entrada I_{apl} actual aplicada. Entre espigas o impulsos, el voltaje V y la variable sináptica x obedecen a :

$$C_m \frac{dV}{dt} = -g_L(V - V_L) + I_{apl} \qquad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\tau} \qquad (5)$$

Cuando $V = V_\theta$, se genera una espiga o impulso, y se realizan los siguientes ajustes:

$$V \leftarrow V_0 \qquad (6)$$

$$x \leftarrow x + \frac{1}{\tau} \qquad (7)$$

Según la aproximación discutida en clase, este modelo puede reducirse a:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = f(I_{apl}) \qquad (8)$$

Donde *f* es la relación entre la tasa de disparo y la entrada aplicada actual que se calculó en el ejercicio 1(a).

Las ecuaciones que hemos visto en este problema han sido lo suficientemente simples como para que podamos dar soluciones analíticas, pero esto no será siempre posible. Como otra posibilidad, podemos analizar la dinámica utilizando la simulación. En MATLAB, un sistema $\frac{dy}{dt} = f(y)$ puede simularse seleccionando las condiciones iniciales $y(1)$, y llevando a cabo reiteradamente, el paso de integración de Euler $y(t+1) = y(t) + dt\frac{dy}{dt}(t)$.

a. Simule UNA única neurona de integración y disparo definida en la ec. (1), con la entrada I_{apl} aplicada actual, ajustada en 0. Adopte los siguientes parámetros para la simulación.

C_m	0.5nF
g_L	0.025 μs
V_L	-70mV
V_θ	-52mV
V_0	-59 mV

Comience con $I_{apl} = 0$. Ajuste I_{alp} a 2.5nA, de modo que la neurona empiece a disparar potenciales de acción, y calcule el comportamiento resultante de la variable sináptica *x*. Compare esto con el comportamiento de *x*, pronosticado por las ecuaciones reducidas, simulando también la dinámica de la variable *x* reducida, para los diferentes valores de los parámetros (τ = 5ms y 150 ms). Explique con sus palabras la diferencia cualitativa entre las soluciones exactas y promediadas para $x(t)$.