# 9.641 Redes neuronales
# Boletín de problemas 5: PCA (Análisis del componente principal) y redes lineales

1. Análisis del componente principal mediante el uso de datos MNIST.

   (a) Utilice el comando `cov` para calcular la covarianza de los “doses” en `mnistabridged.mat`. A continuación, utilice el comando `eig` para hallar los eigenvectores y los eigenvalores. Visualice los diez eigenvectores que corresponden a los diez primeros eigenvalores. Estos son los componentes principales y deberían mostrarse como imágenes.

   (b) Utilizar el comando `eig` no resulta eficaz, ya que éste halla todos los eigenvectores, y no únicamente los deseados. Demuestre que iterar:

   $$x := \frac{Cx}{|Cx|}$$

   converge al eigenvector principal desde casi todas las condiciones iniciales. Haga una simulación numérica y compruebe que el resultado es el mismo que el eigenvector principal obtenido mediante `eig`.

2. Considere la red lineal de dos neuronas:

$$\tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 = b_1 + W_{11}x_1 + W_{12}x_2 \qquad (1)$$

$$\tau \frac{dx_2}{dt} + x_2 = b_2 + W_{21}x_1 + W_{22}x_2 \qquad (2)$$

con

$$W = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

a. Calcule la respuesta de estado constante para $b_1 = 1$ y $b_2 = 2$, resolviendo la ecuación lineal $(I - W)\, x = b$ para $x$.

b. Halle los eigenvalores de $W$. ¿Cuáles son las ganancias de los eigenmodos correspondientes?

c. Halle los eigenvectores derechos e izquierdos de $W$. Dado que $W$ no es simétrico, los eigenvectores izquierdos y derechos serán distintos entre sí. Observará los modos diferencial y común, pero éstos no serán tan sencillos como lo que se derivaron en clase para el par mutuamente inhibitorio.

d. Utilice ahora los eigenvectores y los eigenvalores para factorizar $W$ como $S\Lambda S^{-1}$

e. Calcule ahora la respuesta de estado constante en los tres pasos siguientes. Debería obtener la misma respuesta que al resolver $(I - W)x = b$ para $x$. Esto es porque $(I - W)^{-1} = S(I - \Lambda)^{-1} S^{-1}$.

   i. Exprese $b$ como una combinación lineal de eigenvectores derechos.

ii. Multiplique los coeficientes de esta combinación lineal por las ganancias adecuadas.

iii. Utilice estos resultados para volver a combinar los eigenvectores derechos, dando la respuesta de estado constante x.

3. Considere la red lineal de N-neuronas rotacionalmente invariables

$$\tau \frac{dx_i}{dt} + x_i = b_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} x_j \quad \text{o} \quad \tau \frac{dx}{dt} + x = b + Wx \tag{4}$$

donde $W$ es una matriz *circulante*

$$\begin{pmatrix} w_0 & w_{N-1} & . & . & w_1 \\ w_1 & w_0 & w_{N-1} & . & w_2 \\ . & w_1 & w_0 & . & . \\ . & . & . & . & w_{N-1} \\ w_{N-1} & w_{N-2} & . & w_1 & w_0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Esta forma indica que la intensidad de interacción entre dos neuronas depende únicamente de su separación, si imaginamos que las neuronas tienen una disposición secuencial alrededor de un anillo. El vector $b$ consta de $N$ entradas a las neuronas, y el vector $x$ consta de $N$ actividades neuronales. Sigamos la convención en la que los índices van de 0 a $N$ – 1, de modo que $x_0$, ... $x_{N-1}$, son las actividades neuronales.

a. Defina la raíz $N$º de la unidad $z = \exp(2\pi i/N)$ y la matriz de Fourier $F_{mn} = z^{mn}$. Los *modos de Fourier* se definen como los vectores de columna de F. Demuestre que los modos de Fourier son eigenvectores de W, y halle los eigenvalores de estos modelos en función de las entradas de la matriz circulante.

b. Considere el caso del acoplamiento del vecino más cercano. En este caso especial, el resultado es $W_1 = W_{N-1} = c$, mientras que en el resto de la matriz circulante es cero. ¿Para qué valores de $c$ permanece estable la red? En las siguientes preguntas, limite $c$ a estos valores.

c. Especifique pormenorizadamente el caso inhibitorio $c > 0$.

   i. Resuelva el estado constante $x = (I - W)^{-1} b$ cuando hay una única entrada activa, y el resto son cero (respuesta a impulso). Describa verbalmente y haga un esbozo gráfico de los rasgos cualitativos de la solución.

   ii. Haga el gráfico de los eigenvalores de la matriz de ganancia $(I - W)^{-1}$ como una función del índice del modo de Fourier (número de onda). ¿Qué nodos se amplifican y cuáles se atenúan?

d. Analice detalladamente el caso inhibitorio $c > 0$.

   i. Resuelva el estado constante $x = (I - W)^{-1} b$ cuando hay una única entrada activa, y el resto son cero (respuesta a impulso). Describa verbalmente y realice gráficamente un esbozo de los rasgos cualitativos de la solución.

ii. Haga el gráfico de los eigenvalores de la matriz de ganancia $(I - W)^{-1}$ como una función del índice del modo de Fourier (número de onda). ¿Qué nodos se amplifican y cuáles se atenúan?