

Teoría de red no lineal

Boletín de problemas 6

1. Considere la dinámica de una autapsis no lineal determinada por la ecuación:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = \tanh(wx + b).$$

- a. Tenga presente el caso en el que $w = \frac{1}{2}$. En este caso hay un sólo estado constante $[-2, 2]$, y es estable. La iteración:

$$x := \tanh(wx + b) \tag{1}$$

debería converger a x^* desde cualquier x inicial. Utilizando esta herramienta, determine el valor del estado constante como función de b sobre el dominio $[-2, 2]$. Este grafo representa la relación entrada / salida del sistema.

- b. Considere el caso donde $w = 2$. En este caso hay nada menos que tres estados constantes del sistema, 2 estables y 1 inestable, de modo que la relación entrada / salida resulta algo más compleja. El procedimiento de iteración en la ecuación 1 convergerá a los estados constantes estables si x se inicializa dentro de su pila de atracción. Para el estado constante inestable, utilice la iteración:

$$x := \frac{\tanh^{-1}(x) - b}{w} \tag{2}$$

Mediante estos procedimientos, determine los estados constantes de x como función de b sobre el dominio $[-2, 2]$. Este trazado también se conoce como diagrama de bifurcación. Asegúrese de que comprende los dominios en los que existen estos estados constantes.

- c. Haga una simulación de este sistema mediante la integración de Euler, utilizando $w = 2$ y $\tau = 1$. Comience la simulación con $b = 1$ y luego ajuste $b = 0$ y $t = 5$ s. ¿En qué valor se detiene x ? Ejecute de nuevo la simulación con $b = -1$ para los 5 primeros segundos, y posteriormente con $b = 0$. ¿Cuál es el valor final de x para esta simulación? Explique con sus palabras la relación entrada / salida de este sistema.
- d. En el apartado (b), observó dos puntos de bifurcación para este sistema – los valores de b donde varía el número de estados constantes. En este problema hallaremos esos puntos analíticamente, en función de w .

- i. Los puntos de bifurcación se dan cuando la línea $y = x$ es tangente a $y = \tanh(wx + b)$. Escriba dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas (x y b) que describan esta condición.

- ii. La derivada de la función \tanh es muy simple:

$$\frac{\partial \tanh(u)}{\partial u} = 1 - \tanh^2(u).$$

Utilizando esta información, resuelva

los valores de x y b en el punto de bifurcación como función de w . La solución debería coincidir con los trazados que realizó en el apartado (b).

2. En este ejercicio, estudiaremos la dinámica de la red neuronal N .

$$\frac{dx_i}{dt} + x_i = \left[b_i + \alpha x_i - \beta \sum_{j=1}^N x_j \right]^+ \quad (3)$$

Aquí α y β son positivas e indican las potencias de autoexcitación e inhibición global, respectivamente. La función $[u]^+ = \max\{u, 0\}$ es la no linealidad de rectificación.

- a. Consideremos en primer lugar el caso de excitación débil ($\alpha < 1$).
- i. Demuestre que las ecuaciones de punto fijo pueden escribirse como:

$$x_i = \frac{1}{1-\alpha} \left[b_i - \beta \sum_{j=1}^N x_j \right]^+ \quad (4)$$

si ($\alpha < 1$). Una de las interpretaciones de estas ecuaciones es que un umbral común $\beta \sum_{j=1}^N x_j$ se sustrae de todas las entradas b_i , y el resultado es rectificado y ampliado con ganancia $1/(1-\alpha)$ para producir las salidas x_i , que luego determinan el umbral de modo autocoherente.

- ii. Suponga que las entradas b_i tienen distintos valores, y ordénelos como $b_1 > b_2 > \dots > b_N$, sin perder la generalidad. A partir de las ecuaciones de punto fijo, sólo las neuronas k destacadas (aquellas con las mayores entradas k) se encuentran activas (> 0) en un punto fijo. El número k se definirá a continuación, pero suponga por ahora que k está determinado, y demuestre que:

$$\sum_{i=1}^k x_i = \frac{1}{1-\alpha + k\beta} \sum_{i=1}^k b_i \quad (5)$$

Esto significa que la ganancia del modo común es $1/(1-\alpha + k\beta)$.

- iii. Utilice este resultado para mostrar que k debe satisfacer:

$$b_k > \frac{\beta}{1-\alpha + \beta k} \sum_{i=1}^k b_i > b_{k+1} \quad (6)$$

- iv. Demuestre que k existe y que es única.

- v. ¿Cuál es la proporción $(x_i - x_j)/(b_i - b_j)$, si ambas neuronas i y j se encuentran activas? Esta proporción es la ganancia diferencial.
- vi. Muestre que sólo la neurona destacada se encuentra activa en el límite como $\infty \rightarrow 1$ (la ganadora en potencia).

- b. Análisis de estabilidad local. En los alrededores de un punto fijo con neuronas activas k , podemos alinear la dinámica de las neuronas activas para obtener:

$$\frac{dx_i}{dt} + x_i = b_i + \alpha x_i - \beta \sum_{j=1}^k x_j \quad (7)$$

Otra posibilidad consiste en escribir la fórmula del vector matriz:

$$\frac{dx}{dt} + x = b + Wx \quad (8)$$

donde $W = \alpha I - \beta 11^T$, I es la matriz de identidad con unos en la diagonal, 1 es el vector columna compuesto por todos los unos, y el producto exterior 11^T es la matriz que consta de todos los unos. Halle los eigenvalores k y los eigenvectores de W . Consejo: un eigenvector es el modo común 1 y el resto son los modos diferenciales (vectores cuyos componentes se añaden a cero). Derive los valores de α , β y k para los que estos modos se mantienen estables.

- c. Consideremos ahora el caso de una excitación fuerte ($\alpha > 1$). En el problema anterior, tendría que haber mostrado que todos los modos diferenciales son inestables en este caso. En consecuencia, cualquier punto fijo estable debe tener sólo una única neurona activa (la ganadora en potencia).
- i. Muestre que la actividad de una única neurona está determinada por:

$$x_i = \frac{b_i}{1 - \alpha + \beta} \quad (9)$$

¿Qué ocurre si $\alpha > 1 + \beta$?

- ii. Muestre que esta es una solución autoconcoherente para cualquier i de 1 a k , donde

$$b_k \geq \frac{(1 - \alpha + \beta)b_1}{\beta} > b_{k+1} \quad (10)$$

Dicho de otro modo, cualquier neurona cuya entrada sea mayor que $(1 - \alpha + \beta)/\beta$ veces la entrada mayor, puede acabar siendo ganadora, dependiendo de las condiciones iniciales de la dinámica. A este fenómeno de la existencia de múltiples puntos fijos estables se le atribuye el término abreviado de multiestabilidad.

- iii. Histéresis: Considere una red de dos neuronas con potencial de ganadoras con $b_1 = 1$. Determine la separación d de las dos ramificaciones de la curva de histéresis de esta red como

función de α y β . Aclaración: la curva de histéresis se determina al señalar la neurona ganadora como función de b_2 . Imagine que b_2 aumenta y disminuye de forma alternativa, para provocar el cambio.